

# METODI MATEMATICI PER LA FISICA

SECONDO APPELLO ESTIVO - 9 LUGLIO 2024

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che il punteggio assegnato a ciascuna procedura di risoluzione può variare tra lo zero e il massimo indicato ed è stabilito valutando:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di semplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo;
6. la bellezza e l'armonia del tutto.

## PRIMO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$\mathcal{J}_m = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^{2m}(x)}{\cosh(x)} dx,$$

$\forall m \in \mathbb{N}$ .

**Curiosità.** Il simbolo  $\mathcal{J}$  è equivalente alla lettera "d" del cosiddetto alfabeto *bopomofo*, che è stato concepito e utilizzato a partire dal 1910 nella Repubblica Popolare Cinese per fini didattico-pedagogici. Permette di traslitterare alcune lingue cinesi tra cui il cinese standard. È composto da 37 caratteri e 5 segni tonali, che permettono la trascrizione di tutti i suoni del mandarino.

## SOLUZIONE DEL PRIMO PROBLEMA

La funzione integranda è meromorfa e non ha singolarità lungo il percorso d'integrazione. Usiamo l'espressione di Eulero per la potenza  $2m$ -esima della funzione seno a numeratore e si ha

$$\mathcal{J}_m = \frac{1}{(2i)^{2m}} \sum_{j=0}^{2m} (-1)^j \binom{2m}{j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2ix(j-m)}}{\cosh(x)} dx = \frac{1}{(-4)^m} \sum_{j=0}^{2m} (-1)^j \binom{2m}{j} T_{j,m},$$

con

$$T_{j,m} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2ix(j-m)}}{\cosh(x)} dx, \quad \forall j \in \{0, 1, \dots, 2m\}, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Questi integrali si calcolano usando il percorso a rettangolo,

$$\Gamma_R = [-R, R] \cup \{z : z = R + iy, y \in [0, \pi]\} \cup \{z : z = -x + i\pi, x \in [-R, R]\} \cup \{z : z = -R - iy, y \in [0, \pi]\},$$

orientato in verso positivo, cioè antiorario. Consideriamo le espressioni degli integrali in termini del teorema dei residui

$$\oint_{\Gamma_R} \frac{e^{2iz(j-m)}}{\cosh(z)} dz = 2i\pi \operatorname{Res} \left[ \frac{e^{2iz(j-m)}}{\cosh(z)}, z = i\pi/2 \right]$$

e scomponendo il percorso nei tratti rettilinei

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma_R} \frac{e^{2iz(j-m)}}{\cosh(z)} dz &= \int_{-R}^R \frac{e^{2ix(j-m)}}{\cosh(x)} dx + i \int_0^\pi \frac{e^{2i(R+iy)(j-m)}}{\cosh(R+iy)} dy - \int_{-R}^R \frac{e^{2i(x+i\pi)(j-m)}}{-\cosh(x)} dx - i \int_0^\pi \frac{e^{2i(-R+iy)(j-m)}}{\cosh(-R+iy)} dy \\ &= \int_{-R}^R \frac{e^{2ix(j-m)}}{\cosh(x)} dx + ie^{2iR(j-m)} \int_0^\pi \frac{e^{-2y(j-m)}}{\cosh(R+iy)} dy + e^{-2\pi(j-m)} \int_{-R}^R \frac{e^{2ix(j-m)}}{\cosh(x)} dx \\ &\quad - ie^{-2iR(j-m)} \int_0^\pi \frac{e^{-2y(j-m)}}{\cosh(-R+iy)} dy. \end{aligned}$$

Nel limite  $R \rightarrow \infty$  la prima espressione non cambia e si ha

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{\Gamma_R} \frac{e^{2iz(j-m)}}{\cosh(z)} dz = 2i\pi \operatorname{Res} \left[ \frac{e^{2iz(j-m)}}{\cosh(z)}, z = i\pi/2 \right] = 2\pi e^{\pi(m-j)},$$

mentre la seconda diventa

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{\Gamma_R} \frac{e^{2iz(j-m)}}{\cosh(z)} dz &= \lim_{R \rightarrow \infty} \underbrace{\int_{-R}^R \frac{e^{2ix(j-m)}}{\cosh(x)} dx}_{=T_{j,m}} + ie^{2iR(j-m)} \underbrace{\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{e^{-2y(j-m)}}{\cosh(R+iy)} dy}_{=0} \\ &\quad + e^{-2\pi(j-m)} \lim_{R \rightarrow \infty} \underbrace{\int_{-R}^R \frac{e^{2ix(j-m)}}{\cosh(x)} dx}_{=T_{j,m}} - ie^{-2iR(j-m)} \underbrace{\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{e^{-2y(j-m)}}{\cosh(-R+iy)} dy}_{=0} \\ &= (1 + e^{-2\pi(j-m)}) T_{j,m} = 2e^{\pi(m-j)} \cosh(\pi(m-j)) T_{j,m}, \quad \forall j \in \{0, 1, \dots, 2m\}, \quad \forall m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Verifichiamo che i limiti per  $R \rightarrow \infty$  degli integrali sui tratti verticali siano nulli, usando la disuguaglianza di Darboux,  $\forall j \in \{0, 1, \dots, 2m\}$ , si ha

$$\left| \int_0^\pi \frac{e^{-2y(j-m)}}{\cosh(\pm R + iy)} dy \right| \leq 2 \int_0^\pi \frac{e^{-2y(j-m)}}{|e^{\pm R + iy} + e^{\mp R - iy}|} dy \leq \begin{cases} \frac{e^{-2\pi(j-m)}}{|e^{\pm R} - e^{\mp R}|} (m-j) \underset{R \rightarrow \infty}{\sim} \frac{e^{-2\pi(j-m)}}{m-j} e^{-R} & j \neq m \\ \frac{\pi}{|e^{\pm R} - e^{\mp R}|} \underset{R \rightarrow \infty}{\sim} \pi e^{-R} & j = m \end{cases}.$$

In entrambi i casi,  $j \neq m$  e  $j = m$ , al divergere di  $R$  gli integrali si annullano.

Uguagliando le due espressioni, in termini del residuo e dei contributi sui tratti rettilinei per il limite dell'integrale su  $\Gamma_R$ , otteniamo i valori degli integrali

$$T_{j,m} = \frac{\pi}{\cosh(\pi(m-j))} \quad \forall j \in \{0, 1, \dots, 2m\}, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Usiamo questa espressione in

$$\mathcal{H}_m = \frac{1}{(-4)^m} \sum_{j=0}^{2m} (-1)^j \binom{2m}{j} T_{j,m}, \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

e abbiamo il risultato finale

$$\mathcal{H}_m = \frac{1}{(-4)^m} \pi \sum_{j=0}^{2m} \binom{2m}{j} \frac{(-1)^j}{\cosh(\pi(m-j))}, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

## SECONDO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si ottengano tutte le serie di Laurent della funzione

$$f(z) = \frac{1}{z^{10}},$$

con centro in  $z = 1$ .

### SOLUZIONE DEL SECONDO PROBLEMA

La funzione  $f(z)$  è meromorfa, ha la sola singolarità polare di ordine 10 nell'origine. Le serie di Laurent centrate in  $z = 1$  sono quindi due e hanno come domini di convergenza il disco e l corona circolare

$$C_1 = \{z : |z-1| < 1\}, \quad C_2 = \{z : |z-1| > 1\}.$$

Per la serie convergente in  $C_1$ , consideriamo la riscrittura

$$f(z) = \frac{1}{(1+z-1)^{10}},$$

che, con la condizione  $|z-1| < 1$ , è proporzionale alla derivata nona della serie geometrica di ragione  $\alpha = -(z-1)$ . Infatti si, per  $|\alpha| < 1$ , si ha

$$\frac{1}{1+\alpha} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \alpha^j,$$

quindi per la decima potenza,

$$\frac{1}{(1+\alpha)^{10}} = -\frac{1}{9!} \frac{d^9}{d\alpha^9} \frac{1}{1+\alpha} = \frac{1}{9!} \sum_{j=9}^{\infty} (-1)^{j+1} j(j-1)\cdots(j-8) \alpha^{j-9}.$$

Ne consegue

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(1+z-1)^{10}} = \frac{1}{9!} \sum_{j=9}^{\infty} (-1)^{j+1} j(j-1)\cdots(j-8)(z-1)^{j-9} = \{k = j-9\} \\ &= \frac{1}{9!} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (k+9)(k+8)\cdots(k+1)(z-1)^k. \end{aligned}$$

Quindi, considerando la forma generale

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k (z-1)^k,$$

i coefficienti sono dati da

$$C_k = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ (-1)^k \binom{k+9}{k} & k \geq 0 \end{cases}.$$

È interessante notare che, poiché nel punto  $z = 1$  la funzione  $f(z)$  è analitica, la serie ottenuta ha solo la parte regolare, cioè i coefficienti con indici negativi sono nulli.

La serie di Laurent che converge nella corona  $C_2$ , in cui si ha  $|z-1| > 1$ , si ottiene come

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z-1)^{10} (1+1/(z-1))^{10}} = \frac{1}{(z-1)^{10} 9!} \sum_{j=9}^{\infty} (-1)^{j+1} j(j-1)\cdots(j-8)(z-1)^{-j+9} \\ &= \sum_{j=9}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{j!}{9!(j-7)!} (z-1)^{-j-1} = \sum_{j=9}^{\infty} (-1)^{j+1} \binom{j}{9} (z-1)^{-j-1} = \{k = -j-1\} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{-10} (-1)^k \binom{-k-1}{9} (z-1)^k. \end{aligned}$$

Anche in questo caso, scrivendo la forma generale

$$f(z) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} D_l (z-1)^l,$$

per i coefficienti di Laurent si ha la legge multipla

$$D_l = \begin{cases} (-1)^l \binom{-k-1}{9} & l \leq -10 \\ 0 & k > -10 \end{cases}.$$

### TERZO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$\square_{\beta} = \int_0^{\pi/2} \text{sen}^{\beta}(\alpha) d\alpha$$

con  $\text{Re}(\beta) > -1$ .

**Curiosità.** Il simbolo  $\square$  rappresenta la lettera "r" dell'alfabeto bopomofo descritto nel primo problema.

### SOLUZIONE DEL TERZO PROBLEMA

Facciamo il cambiamento di variabile  $t = \cos^2(\alpha)$ , da cui:  $dt = -2\cos(\alpha)\sin(\alpha)$ , alla luce del quale riscriviamo la funzione integranda come

$$\begin{aligned} \square_{\beta} &= \int_0^{\pi/2} \sin^{\beta}(\alpha) d\alpha = \int_0^{\pi/2} \sin^{\beta-1}(\alpha) \cos^{-1}(\alpha) \sin(\alpha) \cos(\alpha) d\alpha \\ &= \int_0^{\pi/2} \underbrace{(1 - \cos^2(\alpha))^{\beta/2-1/2}}_{=(1-t)^{\beta/2-1/2}} \underbrace{\cos^{-1}(\alpha)}_{=t^{-1/2}} \underbrace{\sin(\alpha) \cos(\alpha)}_{=-dt/2} d\alpha, \end{aligned}$$

da cui

$$\square_{\beta} = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-t)^{\beta/2-1/2} t^{-1/2} dt.$$

Usando la rappresentazione in forma di integrale della funzione beta di Eulero e considerandone la relazione con la funzione gamma

$$\beta(u, z) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{u-1} dt = \frac{\Gamma(z)\Gamma(u)}{\Gamma(z+u)}, \quad \text{Re}(z), \text{Re}(u) > 0,$$

si ha

$$\square_{\beta} = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-t)^{\beta/2+1/2-1} t^{1/2-1} dt = \frac{1}{2} \beta(\beta/2 + 1/2, 1/2),$$

dove si sono usate  $z = 1/2$  e  $u = \beta/2 + 1/2$  e le condizioni di convergenza sono verificate, infatti

$$\text{Re}(z) = 1/2 > 0, \quad \text{Re}(u) = \text{Re}(\beta)/2 + 1/2 > 0 \Leftrightarrow \text{Re}(\beta) > -1.$$

In termini delle funzioni gamma si ha

$$\square_{\beta} = \frac{\Gamma(\beta/2 + 1/2)\Gamma(1/2)}{2\Gamma(\beta/2 + 1)},$$

usando infine:  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$  e  $\Gamma(\beta/2 + 1) = (\beta/2)\Gamma(\beta/2)$ , si arriva al risultato

$$\square_{\beta} = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\beta/2 + 1/2)}{\beta\Gamma(\beta/2)}.$$

### QUARTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si dimostri che:  $\vec{A}(\eta_1, \eta_2, \eta_3) \in \mathbb{C}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ , tale che l'operatore

$$\hat{S} = \sum_{j=1}^3 \eta_j \hat{\sigma}_j,$$

dove  $\{\hat{\sigma}_j\}_{j=1}^3$  è l'insieme degli operatori di Pauli agenti nello spazio vettoriale bidimensionale  $E_2$ , sia un proiettore. Se ne calcoli la norma.

### SOLUZIONE DEL QUARTO PROBLEMA

Poiché gli operatori di Pauli sono hermitiani, scegliendo un vettore reale  $\vec{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) \in \mathbb{R}^3$ , si ha che l'operatore  $\hat{S} = \vec{\eta} \cdot \hat{\sigma}$  è hermitiano. Verifichiamo l'idempotenza, calcoliamo il quadrato dell'operatore

$$\hat{S}^2 = \sum_{j,k=1}^3 \eta_j \eta_k \hat{\sigma}_j \hat{\sigma}_k = \sum_{j,k=1}^3 \eta_j \eta_k (\hat{I} \delta_{jk} + 2i \epsilon_{jkm} \hat{\sigma}_m) = \hat{I} \sum_{j=1}^3 \eta_j^2.$$

Questo operatore,  $\forall \vec{\eta} \neq (0, 0, 0)$ , è diverso dall'operatore  $\hat{S}$ , poiché non esiste una combinazione degli operatori di Pauli coincidente con l'operatore identità.

Consideriamo il quadrato della norma dell'operatore

$$\|\hat{S}\|^2 = \left( \sup_{\|x\|=1} \{\|\hat{S}|x\rangle\| \} \right)^2 = \sup_{\|x\|=1} \{\|\hat{S}|x\rangle\|^2\},$$

con

$$\|\hat{S}|x\rangle\|^2 = \langle x|\hat{S}^\dagger\hat{S}|x\rangle = \sum_{j,k=1}^3 \eta_j^* \eta_k \langle x|\hat{\sigma}_j \hat{\sigma}_k|x\rangle,$$

usando le relazioni dell'algebra degli operatori di Pauli e la condizione  $\|x\| = 1$ ,

$$\begin{aligned} \|\hat{S}|x\rangle\|^2 &= \sum_{j,k=1}^3 \eta_j^* \eta_k \langle x|\hat{\sigma}_j \hat{\sigma}_k|x\rangle = \sum_{j,k=1}^3 \eta_j^* \eta_k \langle x|(\hat{\delta}_{jk} + i\epsilon_{jkm}\hat{\sigma}_m)|x\rangle \\ &= \sum_{j=1}^3 |\eta_j|^2 + i \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{jkm} \eta_j^* \eta_k \langle x|\hat{\sigma}_m|x\rangle. \end{aligned}$$

La norma al quadrato è reale, quindi

$$\begin{aligned} \|\hat{S}|x\rangle\|^2 &= \sum_{j=1}^3 |\eta_j|^2 + \operatorname{Re} \left( i \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{jkm} \eta_j^* \eta_k \langle x|\hat{\sigma}_m|x\rangle \right) = \sum_{j=1}^3 |\eta_j|^2 - \operatorname{Im} \left( \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{jkm} \eta_j^* \eta_k \langle x|\hat{\sigma}_m|x\rangle \right) \\ &= \sum_{j=1}^3 |\eta_j|^2 - \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{jkm} \operatorname{Im}(\eta_j^* \eta_k) \langle x|\hat{\sigma}_m|x\rangle, \end{aligned}$$

dove abbiamo sfruttato la realtà del valore di aspettazione  $\langle x|\hat{\sigma}_m|x\rangle \in \mathbb{R}$ ,  $\forall m \in \{1, 2, 3\}$ , conseguenza dell'hermitianità degli operatori di Pauli. Per calcolare i valori di aspettazione usiamo la rappresentazione matriciale rispetto alla base degli autovettori del terzo autovettore, quindi

$$\begin{aligned} \langle x|\hat{\sigma}_1|x\rangle &= (x^{1*} x^{2*}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = x^{1*} x^2 + x^{2*} x^1 = 2 \operatorname{Re}(x^{1*} x^2), \\ \langle x|\hat{\sigma}_2|x\rangle &= (x^{1*} x^{2*}) \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = -ix^{1*} x^2 + ix^{2*} x^1 = 2 \operatorname{Im}(x^{1*} x^2), \\ \langle x|\hat{\sigma}_3|x\rangle &= (x^{1*} x^{2*}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = |x^1|^2 - |x^2|^2, \end{aligned}$$

dove  $x^1$  e  $x^2$  sono le componenti contro-varianti del vettore  $|x\rangle$  rispetto alla base degli autovettori del terzo operatore di Pauli. Inoltre, avendo  $\operatorname{Im}(\eta_j^* \eta_k) = -\operatorname{Im}(\eta_k^* \eta_j)$ ,  $\forall j, k \in \{1, 2, 3\}$ , la norma al quadrato può essere scritta come

$$\|\hat{S}|x\rangle\|^2 = \sum_{j=1}^3 |\eta_j|^2 - 2 \operatorname{Im}(\eta_1^* \eta_2) (|x^1|^2 - |x^2|^2) - 4 \operatorname{Im}(\eta_2^* \eta_3) \operatorname{Re}(x^{1*} x^2) - 4 \operatorname{Im}(\eta_3^* \eta_1) \operatorname{Im}(x^{1*} x^2).$$

Scegliamo le componenti  $x^1 = \operatorname{sen}(\theta)e^{i\phi}$  e  $x^2 = \cos(\theta)$  da cui

$$\begin{aligned} |x^1|^2 - |x^2|^2 &= \operatorname{sen}^2(\theta) - \cos^2(\theta) = -\cos(2\theta), \\ \operatorname{Re}(x^{1*} x^2) &= \operatorname{Re}(\operatorname{sen}(\theta)e^{-i\phi} \cos(\theta)) = \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta) \cos(\phi) = \frac{\operatorname{sen}(2\theta) \cos(\phi)}{2}, \\ \operatorname{Im}(x^{1*} x^2) &= \operatorname{Im}(\operatorname{sen}(\theta)e^{-i\phi} \cos(\theta)) = \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta) \sin(\phi) = -\frac{\operatorname{sen}(2\theta) \operatorname{sen}(\phi)}{2}, \end{aligned}$$

quindi

$$\|\hat{S}|x\rangle\|^2 = \sum_{j=1}^3 |\eta_j|^2 + 2 \operatorname{Im}(\eta_1^* \eta_2) \cos(2\theta) - 2 \operatorname{Im}(\eta_2^* \eta_3) \operatorname{sen}(2\theta) \cos(\phi) + 2 \operatorname{Im}(\eta_3^* \eta_1) \operatorname{sen}(2\theta) \operatorname{sen}(\phi).$$

Massimizziamo questa quantità rispetto agli angoli  $\theta$  e  $\phi$ , si hanno le componenti del gradiente

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \theta} \|\hat{S}|x\rangle\|^2 &= -4 \operatorname{Im}(\eta_1^* \eta_2) \operatorname{sen}(2\theta) - 4 \cos(2\theta) (\operatorname{Im}(\eta_2^* \eta_3) \cos(\phi) - \operatorname{Im}(\eta_3^* \eta_1) \operatorname{sen}(\phi)), \\ \frac{\partial}{\partial \phi} \|\hat{S}|x\rangle\|^2 &= 2 \operatorname{sen}(2\theta) (\operatorname{Im}(\eta_2^* \eta_3) \operatorname{sen}(\phi) + \operatorname{Im}(\eta_3^* \eta_1) \cos(\phi)),\end{aligned}$$

si azzerano in  $(\theta_1, \phi_{1,k})$ , tali che

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(2\theta_1) &= 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_1 = 0, \\ \operatorname{Im}(\eta_2^* \eta_3) \cos(\phi_1) - \operatorname{Im}(\eta_3^* \eta_1) \operatorname{sen}(\phi_1) &= 0 \quad \Rightarrow \quad \phi_{1,k} = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(\eta_2^* \eta_3)}{\operatorname{Im}(\eta_3^* \eta_1)}\right) + k\pi,\end{aligned}$$

con  $k \in \mathbb{Z}$ .

Inoltre, si azzerano in  $(\theta_{2,k}, \phi_{2,k})$ , tali che

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}(\eta_2^* \eta_3) \operatorname{sen}(\phi_2) + \operatorname{Im}(\eta_3^* \eta_1) \cos(\phi_2) &= 0 \quad \Rightarrow \quad \phi_{2,k} = \arctan\left(\frac{-\operatorname{Im}(\eta_3^* \eta_1)}{\operatorname{Im}(\eta_2^* \eta_3)}\right) + k\pi, \\ \operatorname{Im}(\eta_1^* \eta_2) \operatorname{sen}(2\theta_2) + \cos(2\theta_2) (\operatorname{Im}(\eta_2^* \eta_3) \cos(\phi_2) - \operatorname{Im}(\eta_3^* \eta_1) \operatorname{sen}(\phi_2)) &= 0 \\ \Rightarrow \quad \theta_{2,k} &= \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(\eta_3^* \eta_1) \operatorname{sen}(\phi_2) - \operatorname{Im}(\eta_2^* \eta_3) \cos(\phi_2)}{\operatorname{Im}(\eta_1^* \eta_2)}\right) + k\pi\end{aligned}$$

con  $k \in \mathbb{Z}$ .

In definitiva, posto

$$R(\theta, \phi) = 2 \operatorname{Im}(\eta_1^* \eta_2) \cos(2\theta) - 2 \operatorname{sen}(2\theta) (\operatorname{Im}(\eta_2^* \eta_3) \cos(\phi) - 2 \operatorname{Im}(\eta_3^* \eta_1) \operatorname{sen}(\phi))$$

ovvero

$$R(\theta, \phi) = \|\hat{S}|x\rangle\|^2 - \sum_{j=1}^3 |\eta_j|^2,$$

si ha

$$\|\hat{S}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^3 |\eta_j|^2 + \max_{k,l,m \in \mathbb{Z}} \{R(\theta_1, \phi_{1,k}), R(\theta_{2,l}, \phi_{2,m})\}}.$$

## QUINTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si calcoli la trasformata di Fourier della funzione

$$\mathcal{L}(x) = \delta'(x^2 - 1).$$

**Curiosità.** Il simbolo  $\mathcal{L}$  rappresenta la lettera “l” dell’alfabeto bopomofo descritto nel primo problema.

### SOLUZIONE DEL QUINTO PROBLEMA

Calcoliamo direttamente la trasformata di Fourier integrando per parti

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_k[\mathcal{L}] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x^2 - 1) e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \delta(x^2 - 1) \frac{e^{-ikx}}{2x} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x^2 - 1) \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{ik}{x}\right) e^{-ikx} dx \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x^2 - 1) \left(\frac{1}{x} + ik\right) \frac{e^{-ikx}}{x} dx.\end{aligned}$$

Usiamo la proprietà descritta dalla relazione formale

$$\delta(x^2 - 1) = \frac{\delta(x - 1)}{|2x|_{x=1}} + \frac{\delta(x + 1)}{|2x|_{x=-1}} = \frac{\delta(x - 1) + \delta(x + 1)}{2},$$

si ha

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_k[\mathcal{U}] &= \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\delta(x - 1) + \delta(x + 1)) \left(\frac{1}{x} + ik\right) \frac{e^{-ikx}}{x} dx \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} [ -(-1 + ik)e^{ik} + (1 + ik)e^{-ik} ] = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} [e^{ik} + e^{-ik} + ik(e^{-ik} - e^{ik})],\end{aligned}$$

usando le formule di Eulero per le funzioni seno e coseno, si ottiene

$$\mathcal{F}_k[\mathcal{U}] = \frac{\cos(k) + k \operatorname{sen}(k)}{2\sqrt{2\pi}}.$$

## SESTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 5/30)

Si ottenga l'operatore risolvete dell'operatore di proiezione  $\hat{P}$ .

### SOLUZIONE DEL SESTO PROBLEMA

L'operatore risolvete  $\hat{P}_\lambda$  del proiettore  $\hat{P}$  è definito come

$$\hat{P}_\lambda = (\hat{I}\lambda - \hat{P})^{-1}$$

e dipende dal parametro scalare complesso  $\lambda$ , cioè  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Assumendo le condizioni di convergenza, l'operatore risolvete è rappresentato da una serie geometrica operatoriale. In particolare, con la condizione sul parametro

$$\frac{\|\hat{P}\|}{|\lambda|} < 1 \quad \Rightarrow \quad |\lambda| > \|\hat{P}\| = 1,$$

si ha

$$\hat{P}_\lambda = \lambda^{-1} (\hat{I} - \hat{P}\lambda^{-1})^{-1} = \lambda^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \hat{P}^k \lambda^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{P}^k \lambda^{-k-1}.$$

Infatti, moltiplicando la serie per l'operatore  $(\hat{I}\lambda - \hat{P})$  da sinistra e da destra si hanno

$$\begin{aligned}(\hat{I}\lambda - \hat{P}) \sum_{k=0}^{\infty} \hat{P}^k \lambda^{-k-1} &= \sum_{k=0}^{\infty} \hat{P}^k \lambda^{-k} - \sum_{k=0}^{\infty} \hat{P}^{k+1} \lambda^{-k-1} \\ &= \hat{I} + \hat{P}\lambda^{-1} + \hat{P}^2\lambda^{-2} + \dots - (\hat{P}\lambda^{-1} + \hat{P}^2\lambda^{-2} + \hat{P}^3\lambda^{-3} + \dots) = \hat{I}, \\ \sum_{k=0}^{\infty} \hat{P}^k \lambda^{-k-1} (\hat{I}\lambda - \hat{P}) &= \sum_{k=0}^{\infty} \hat{P}^k \lambda^{-k} - \sum_{k=0}^{\infty} \hat{P}^{k+1} \lambda^{-k-1} \\ &= \hat{I} + \hat{P}\lambda^{-1} + \hat{P}^2\lambda^{-2} + \dots - (\hat{P}\lambda^{-1} + \hat{P}^2\lambda^{-2} + \hat{P}^3\lambda^{-3} + \dots) = \hat{I},\end{aligned}$$

da cui si evince che l'operatore  $\sum_{k=0}^{\infty} \hat{P}^k \lambda^{-k-1}$  è l'inverso dell'operatore  $(\hat{I}\lambda - \hat{P})$  e quindi è l'operatore risolvete  $\hat{P}_\lambda$ . La somma della serie operatoriale può calcolata usando l'idempotenza del proiettore, infatti

$$\hat{P}_\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{P}^k \lambda^{-k-1} = \frac{1}{\lambda} \left( \hat{I} + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{P}^k \lambda^{-k} \right) = \{k' = k - 1\} = \frac{1}{\lambda} \left( \hat{I} + \frac{\hat{P}}{\lambda} \sum_{k'=0}^{\infty} \lambda^{-k'} \right) = \frac{1}{\lambda} \left( \hat{I} + \frac{\hat{P}}{\lambda} \frac{1}{1 - 1/\lambda} \right),$$

in definitiva

$$\hat{P}_\lambda = \frac{1}{\lambda} \left( \hat{I} + \frac{1}{1 - \lambda} \hat{P} \right).$$