

METODI MATEMATICI PER LA FISICA

QUARTO APPELLO ESTIVO - 6 SETTEMBRE 2023

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che il punteggio assegnato a ciascuna procedura di risoluzione può variare tra lo zero e il massimo indicato ed è stabilito valutando:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo.

PRIMO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$\mathfrak{K} = \oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^5 \cosh(z)}.$$

Curiosità. Il simbolo \mathfrak{K} rappresenta *Kokopelli* il dio della fertilità secondo le credenze di alcune tribù di nativi americani che vivevano nei territori a sud-ovest degli attuali Stati Uniti. In questo caso la divinità è raffigurata come un suonatore di flauto gobbo con la testa ornata da quattro piume.

SOLUZIONE DEL PRIMO PROBLEMA

La funzione integranda è meromorfa ha un polo di ordine cinque nell'origine e poli semplici nei punti dell'insieme $\{z_k = (2k+1)i\pi/2\}_{k \in \mathbb{Z}}$, gli zeri della funzione coseno iperbolico. Il percorso d'integrazione, la circonferenza di raggio 2 e con centro nell'origine avvolge una sola volta tre poli, i due semplici $z_0 = i\pi/2$ e $z_{-1} = -i\pi/2$, e il polo di ordine cinque nell'origine. Applicando il teorema dei residui si ha

$$\mathfrak{K} = 2i\pi \left(\text{Res} \left[\frac{1}{z^5 \cosh(z)}, 0 \right] + \text{Res} \left[\frac{1}{z^5 \cosh(z)}, \frac{i\pi}{2} \right] + \text{Res} \left[\frac{1}{z^5 \cosh(z)}, -\frac{i\pi}{2} \right] \right).$$

Il residuo nell'origine può essere ottenuto come il coefficiente di Laurent C_4 della serie della funzione $1/\cosh(z)$ centrata nell'origine. Infatti, si ha che $\forall k \in \mathbb{Z}$,

$$C_k = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\gamma} \frac{dz}{\cosh(z) z^{k+1}},$$

dove γ è un percorso chiuso che avvolge una sola volta l'origine, senza includere gli zeri del funzione coseno iperbolico. Per ottenere il coefficiente C_4 usiamo la somma della serie geometrica. Nel limite $z \rightarrow 0$, si ha

$$\frac{1}{\cosh(z)} = \frac{1}{1 + z^2/2 + z^4/4! + \dots} = 1 - \left(\frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} + \dots \right) + \left(\frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} + \dots \right)^2 + \dots,$$

consideriamo la potenza quattro, ci sono solo i contributi dalla prima e seconda parentesi, cioè

$$\frac{1}{\cosh(z)} = 1 - \left(\frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} + \dots \right) + \left(\frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} + \dots \right)^2 + \dots = \dots + z^4 \left(-\frac{1}{4!} + \frac{1}{2^2} \right) + \dots = \dots + z^4 \frac{5}{24} + \dots,$$

quindi

$$C_4 = \text{Res} \left[\frac{1}{z^5 \cosh(z)}, 0 \right] = \frac{5}{24}.$$

I residui nei poli semplici $z_0 = i\pi/2$ e $z_{-1} = -i\pi/2$ valgono

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^5 \cosh(z)}, \pm \frac{i\pi}{2}\right] = \lim_{z \rightarrow \pm i\pi/2} \frac{z \mp i\pi/2}{z^5 \cosh(z)} = \frac{1}{(\pm i\pi/2)^5 \sinh(\pm i\pi/2)} = -\frac{2^5}{\pi^5}.$$

In definitiva

$$\mathbb{A} = 2i\pi \left(\frac{5}{24} - \frac{2^6}{\pi^5} \right).$$

SECONDO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$\mathbb{A} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen}(x)}{\cosh(x)} dx.$$

Curiosità. Con il simbolo \mathbb{A} diverse tribù di nativi americani indicavano il gusto di godersi la vita.

SOLUZIONE DEL SECONDO PROBLEMA

La funzione integranda è meromorfa, ha poli semplici nei punti dell'insieme $\{z_k = (2k+1)i\pi/2\}_{k \in \mathbb{Z}}$. Consideriamo il rettangolo

$$\rho_R = [-R, R] \cup \{z : z = R + iy, y \in [0, \pi]\} \cup (-\{z : z = x + i\pi, y \in [-R, R]\}) \cup (-\{z : z = -R + iy, y \in [0, \pi]\}),$$

che, $\forall R \in (0, \infty)$, avvolge una volta la sola singolarità $z_0 = i\pi/2$. Ne consegue

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{\rho_R} \frac{z \operatorname{sen}(z)}{\cosh(z)} dz = 2i\pi \operatorname{Res}\left[\frac{z \operatorname{sen}(z)}{\cosh(z)}, \frac{i\pi}{2}\right] = 2i\pi \lim_{z \rightarrow i\pi/2} \frac{z \operatorname{sen}(z)(z - i\pi/2)}{\cosh(z)} = -\pi^2 \frac{\operatorname{sen}(i\pi/2)}{\sinh(i\pi/2)} = -\pi^2 \operatorname{senh}\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

L'integrale può essere scritto come somma dei contributi relativi ai quattro tratti rettilinei e, considerando l'annullamento degli integrali su intervalli reali simmetrici rispetto all'origine di funzioni integrande dispari, si ha

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{\rho_R} \frac{z \operatorname{sen}(z)}{\cosh(z)} dz &= \mathbb{A} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+i\pi) \operatorname{sen}(x+i\pi)}{\cosh(x+i\pi)} dx \\ &\quad + i \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_0^\pi \frac{(R+iy) \operatorname{sen}(R+iy)}{\cosh(R+iy)} dy - \int_0^\pi \frac{(-R+iy) \operatorname{sen}(-R+iy)}{\cosh(-R+iy)} dy \right) \\ &= \mathbb{A} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+i\pi) (\operatorname{sen}(x) \cosh(\pi) + i \cos(x) \operatorname{senh}(\pi))}{\cosh(x)} dx \\ &\quad + i \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_0^\pi \frac{(R+iy) \operatorname{sen}(R+iy)}{\cosh(R+iy)} dy - \int_0^\pi \frac{(-R+iy) \operatorname{sen}(-R+iy)}{\cosh(-R+iy)} dy \right) \\ &= \mathbb{A} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x \operatorname{sen}(x) \cosh(\pi) - \pi \cos(x) \operatorname{senh}(\pi))}{\cosh(x)} dx \\ &\quad + i \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_0^\pi \frac{(R+iy) \operatorname{sen}(R+iy)}{\cosh(R+iy)} dy - \int_0^\pi \frac{(-R+iy) \operatorname{sen}(-R+iy)}{\cosh(-R+iy)} dy \right) \\ &= \mathbb{A} (1 + \cosh(\pi)) - \pi \operatorname{senh}(\pi) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{\cosh(x)} dx \\ &\quad + i \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_0^\pi \frac{(R+iy) \operatorname{sen}(R+iy)}{\cosh(R+iy)} dy - \int_0^\pi \frac{(-R+iy) \operatorname{sen}(-R+iy)}{\cosh(-R+iy)} dy \right). \end{aligned}$$

Dimostriamo che gli ultimi due integrali sono infinitesimi nel limite $R \rightarrow \infty$. Consideriamo i moduli e usiamo la disuguaglianza di Darboux e quella triangolare

$$\begin{aligned} 0 \leq \left| \int_0^\pi \frac{(\pm R + iy) \operatorname{sen}(\pm R + iy)}{\cosh(\pm R + iy)} dy \right| &\leq \int_0^\pi \frac{(R+y)(e^{-y} + e^y)}{|e^{\pm R} - e^{\mp R}|} dy \\ &\leq \int_0^\pi \frac{(R+\pi)(1+e^\pi)}{|e^{\pm R} + e^{\mp R}|} dy = \pi \frac{(R+\pi)(1+e^\pi)}{|e^{\pm R} - e^{\mp R}|} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Ne consegue che l'integrale richiesto può essere ottenuto dall'equazione

$$\begin{aligned}
 -\pi^2 \operatorname{senh}\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \underline{\Delta} (1 + \cosh(\pi)) - \pi \operatorname{senh}(\pi) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{\cosh(x)} dx \\
 -\pi^2 \operatorname{senh}\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 2\underline{\Delta} \cosh^2(\pi/2) - 2\pi \operatorname{senh}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cosh\left(\frac{\pi}{2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{\cosh(x)} dx \\
 \underline{\Delta} &= \frac{\pi \operatorname{senh}(\pi/2)}{2 \cosh^2(\pi/2)} \left(-\pi + 2 \cosh\left(\frac{\pi}{2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{\cosh(x)} dx \right)
 \end{aligned}$$

Calcoliamo l'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{\cosh(x)} dx,$$

usando lo stesso metodo del percorso rettangolare ρ_R nel limite $R \rightarrow \infty$, si ha

$$\begin{aligned}
 \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{\rho_R} \frac{\cos(z)}{\cosh(z)} dz &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{\cosh(x)} dx - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x + i\pi)}{\cosh(x + i\pi)} dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{\cosh(x)} dx + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x) \cosh(\pi) - i \operatorname{sen}(x) \operatorname{senh}(\pi)}{\cosh(x)} dx \\
 &= (1 + \cosh(\pi)) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{\cosh(x)} dx.
 \end{aligned}$$

Dove, l'annullamento dei contributi sui tratti verticali, paralleli all'asse delle parti immaginarie, segue, a fortiori, dalle stesse considerazioni del caso precedente. Infatti, considerando che la funzione integranda non ha il fattore z a numeratore e la funzione coseno anziché seno, si ha

$$0 \leq \left| \int_0^\pi \frac{\cos(\pm R + iy)}{\cosh(\pm R + iy)} dy \right| \leq \int_0^\pi \frac{e^{-y} + e^y}{|e^{\pm R} - e^{\mp R}|} dy \leq \int_0^\pi \frac{1 + e^\pi}{|e^{\pm R} + e^{\mp R}|} dy = \pi \frac{1 + e^\pi}{|e^{\pm R} - e^{\mp R}|} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

Lo stesso limite dell'espressione precedente può essere ottenuto con il teorema dei residui, cioè

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{\rho_R} \frac{\cos(z)}{\cosh(z)} dz = 2i\pi \operatorname{Res} \left[\frac{\cos(z)}{\cosh(z)}, \frac{i\pi}{2} \right] = 2\pi \cosh\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

quindi l'integrale cercato vale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{\cosh(x)} dx = 2\pi \frac{\cosh(\pi/2)}{1 + \cosh(\pi)} = \frac{\pi}{\cosh(\pi/2)}.$$

Dalla relazione

$$\underline{\Delta} = \frac{\pi \operatorname{senh}(\pi/2)}{2 \cosh^2(\pi/2)} \left(-\pi + 2 \cosh\left(\frac{\pi}{2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{\cosh(x)} dx \right),$$

segue

$$\underline{\Delta} = \frac{\pi \operatorname{senh}(\pi/2)}{2 \cosh^2(\pi/2)} \left(-\pi + 2 \cosh\left(\frac{\pi}{2}\right) \frac{\pi}{\cosh(\pi/2)} \right) = \frac{\pi^2 \operatorname{senh}(\pi/2)}{2 \cosh^2(\pi/2)}$$

e, usando la funzione tangente iperbolica, l'integrale richiesto dal problema è

$$\underline{\Delta} = \frac{\pi^2 \tanh(\pi/2)}{2 \cosh(\pi/2)}.$$

TERZO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Sapendo che la funzione

$$v(x, y) = \cosh(\operatorname{sen}(x) \cosh(y)) \operatorname{sen}(\cos(x) \operatorname{senh}(y))$$

è armonica in \mathbb{R}^2 si ottenga la funzione analitica $\mathfrak{S}(z)$ nella forma la cui scrittura contenga il minor numero di simboli, che verifica le condizioni

$$\operatorname{Im}(\mathfrak{S}(z)) = v(x, y), \quad \operatorname{Re}(\mathfrak{S}(0)) = 0,$$

con $z = x + iy, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Curiosità. Il simbolo \mathfrak{S} rappresenta il sole per la popolazione di nativi americani denominata *Tsiya*.

SOLUZIONE DEL TERZO PROBLEMA

In generale sappiamo che nota la parte reale $s(x, y)$ di una funzione analitica $f(z)$, cioè $\operatorname{Re}(f(z)) = s(x, y)$, è possibile risalire alla stessa funzione usando la relazione

$$f(z) = 2s\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) - \tilde{f}(0) = 2s\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) - f^*(0),$$

dove $\tilde{f}(z) = f^*(z^*) = s(x, -y) - it(x, -y)$, con $t(x, y) = \operatorname{Im}(f(z))$, per cui: $\tilde{f}(0) = -f^*(0)$. Poiché in questo caso è nota la parte immaginaria della funzione, posto $\mathfrak{S}(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, definiamo la funzione analitica

$$f(z) = -i\mathfrak{S}(z) = -i(u(x, y) + iv(x, y)) = v(x, y) - iu(x, y),$$

che ha come parte reale la parte immaginaria di $\mathfrak{S}(z)$ e come parte immaginaria l'opposto di quella reale. Dalla relazione precedente si ha quindi

$$f(z) = 2v\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) - f^*(0) = 2v\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) + i\mathfrak{S}^*(0) = 2v\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) + \operatorname{Im}(\mathfrak{S}(0)) = 2v\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) + v(0, 0) = 2v\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right),$$

dove si è usato il dato per cui nell'origine la funzione è nulla, avendo la parte reale e la parte immaginaria nulle. Calcoliamo la funzione usando le formula di passaggio dalle funzioni iperboliche a quelle trigonometriche e le formule di duplicazione della funzione seno,

$$\begin{aligned} f(z) &= 2v\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) = 2 \cosh(\operatorname{sen}(z/2) \cosh(-iz/2)) \operatorname{sen}(\cos(z/2) \operatorname{senh}(-iz/2)) \\ &= 2 \cosh(\operatorname{sen}(z/2) \cos(z/2)) \operatorname{sen}(-i \cos(z/2) \operatorname{sen}(z/2)) \\ &= 2 \cosh(\operatorname{sen}(z)/2) \operatorname{sen}(-i \operatorname{sen}(z)/2) \\ &= -2i \cosh(\operatorname{sen}(z)/2) \operatorname{senh}(\operatorname{sen}(z)/2) \\ &= -2i \cosh(\operatorname{sen}(z)/2) \operatorname{senh}(\operatorname{sen}(z)/2), \end{aligned}$$

Infine, usando ancora la formula di duplicazione, si ha

$$f(z) = -i \operatorname{senh}(\operatorname{sen}(z)).$$

Poiché la relazione che lega la funzione appena ottenuta a quella cercata è $f(z) = -i\mathfrak{S}(z)$, da cui $\mathfrak{S}(z) = if(z)$, si ha

$$\mathfrak{S}(z) = \operatorname{senh}(\operatorname{sen}(z)).$$

QUARTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si ottengano i valori minimo e massimo, rispettivamente indicati con R_- e R_+ , della funzione razionale

$$R(x, y, z) = \frac{-x^2 - 3y^2 - 3z^2 + 2xy - 2xz + 4yz}{x^2 + y^2 + z^2},$$

definita in $\mathbb{R}^3 \setminus (0, 0, 0)$ e i vettori $\vec{v}_- = (x_-, y_-, z_-)$ e $\vec{v}_+ = (x_+, y_+, z_+)$ in corrispondenza dei quali tali valori sono assunti, ovvero tali che,

$$\min_{\mathbb{R}^3 \setminus (0,0,0)} \{R(x, y, z)\} = R_- = R(x_-, y_-, z_-), \quad \max_{\mathbb{R}^3 \setminus (0,0,0)} \{R(x, y, z)\} = R_+ = R(x_+, y_+, z_+).$$

Suggerimento. Il numeratore della funzione razionale può essere scritto come il valore di aspettazione $\langle v | \hat{A} | v \rangle = v^T A v$ di un opportuno operatore hermitiano \hat{A} definito in uno spazio vettoriale reale e rappresentato dalla matrice simmetrica e reale A .

SOLUZIONE DEL QUARTO PROBLEMA

Seguendo il suggerimento, definiamo la matrice 3×3 A simmetrica e reale che rappresenta l'operatore \hat{A} come

$$A = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_2^1 & A_2^2 & A_3^2 \\ A_3^1 & A_3^2 & A_3^3 \end{pmatrix}$$

e tale che

$$\langle v | \hat{A} | v \rangle = v^T A v = (x \ y \ z) \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_2^1 & A_2^2 & A_3^2 \\ A_3^1 & A_3^2 & A_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -x^2 - 3y^2 - 3z^2 + 2xy - 2xz + 4yz.$$

Il valore di aspettazione in termini degli elementi della matrice A è

$$\langle v | \hat{A} | v \rangle = A_1^1 x^2 + A_2^2 y^2 + A_3^3 z^2 + 2A_2^1 xy + 2A_3^1 xz + 2A_3^2 yz,$$

dell'identità segue

$$A_1^1 = -1, \quad A_2^2 = -3, \quad A_3^3 = -3, \quad A_2^1 = 1, \quad A_3^1 = -1, \quad A_3^2 = 2,$$

quindi

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

La funzione razionale può essere scritta nella forma di un valore di aspettazione normalizzato

$$R(x, y, z) = \frac{\langle v | \hat{A} | v \rangle}{\langle v | v \rangle},$$

infatti, con

$$|v\rangle \leftrightarrow v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

si ha

$$\langle v | v \rangle = x^2 + y^2 + z^2.$$

Indichiamo rispettivamente con $\{\alpha_k\}_{k=1}^3$ e $\{|a_k\rangle\}_{k=1}^3$ gli insiemi degli autovalori e degli autovettori dell'operatore hermitiano \hat{A} , questi ultimi sono ortonormali in quanto l'operatore è normale. Si hanno quindi le tre equazioni agli autovalori

$$\hat{A}|a_k\rangle = \alpha_k|a_k\rangle, \quad k = 1, 2, 3.$$

L'insieme degli autovettori rappresenta una base ortonormale dello spazio vettoriale reale, rispetto ad essa il generico vettore $|v\rangle$ può essere scritto come

$$|v\rangle = v^k |a_k\rangle,$$

dove $v^k = \langle a_k | v \rangle$ è la k -esimo componente contro-variante, con $k = 1, 2, 3$. Usando le rappresentazioni rispetto a questa base, la funzione razionale, assume la forma

$$R = \frac{\langle a_j | v^{j*} \hat{A} v^k | a_k \rangle}{\sum_{k=1}^2 |v^k|^2} = \frac{v^j v^k \alpha_k \langle a_j | a_k \rangle}{\sum_{k=1}^2 (v^k)^2} = \frac{v^j v^k \alpha_k \delta_k^j}{\sum_{k=1}^2 (v^k)^2} = \frac{\sum_{j=1}^3 (v^j)^2 \alpha_j}{\sum_{k=1}^2 (v^k)^2},$$

dove si è sfruttata la realtà dello spazio vettoriale per porre $v^{j*} = v^j$ a numeratore e $|v^k|^2 = (v^k)^2$ a denominatore. Gli autovalori sono reali poiché l'operatore è hermitiano, son quindi ordinati, vale la limitazione

$$\min_{j \in \{1,2,3\}} \{\alpha_j\} \leq \alpha_k \leq \max_{l \in \{1,2,3\}} \{\alpha_l\}, \quad \forall k \in \{1, 2, 3\}.$$

Usando questa duplice disuguaglianza nella definizione della funzione razionale R , ovvero le limitazioni per il numeratore

$$\sum_{j=1}^3 (v^j)^2 \alpha_j \geq \min_{l \in \{1,2,3\}} \{\alpha_l\} \sum_{j=1}^3 (v^j)^2, \quad \sum_{j=1}^3 (v^j)^2 \alpha_j \leq \max_{l \in \{1,2,3\}} \{\alpha_l\} \sum_{j=1}^3 (v^j)^2,$$

si ha

$$\min_{j \in \{1,2,3\}} \{\alpha_j\} \leq R \leq \max_{l \in \{1,2,3\}} \{\alpha_l\}.$$

Ne consegue che i valori minimo e massimo della funzione R coincidono rispettivamente con il minimo e massimo autovalore dell'operatore \hat{A} , cioè

$$R_- = \min_{j \in \{1,2,3\}} \{\alpha_j\}, \quad R_+ = \max_{j \in \{1,2,3\}} \{\alpha_j\}.$$

Si ottengono quando il vettore $|v\rangle$ è l'autovettore corrispondente all'autovalore minimo e massimo. Calcoliamo gli autovalori risolvendo l'equazione secolare

$$\begin{aligned} \det(A - I\alpha) &= 0 \\ \det \begin{pmatrix} -1 - \alpha & 1 & -1 \\ 1 & -3 - \alpha & 2 \\ -1 & 2 & -3 - \alpha \end{pmatrix} &= 0 \\ (-1 - \alpha)[(-3 - \alpha)^2 - 4] + 3 + \alpha - 2 - 2 + 3 + \alpha &= 0 \\ (-1 - \alpha)[(-3 - \alpha)^2 - 6] &= 0, \end{aligned}$$

da cui i tre autovalori ordinati dal minore al maggiore,

$$\alpha_1 = -3 - \sqrt{6}, \quad \alpha_2 = -1, \quad \alpha_3 = -3 + \sqrt{6}.$$

I valori minimo e massimo della funzione razionale sono

$$R_- = \alpha_1 = -3 - \sqrt{6}, \quad R_+ = \alpha_3 = -3 + \sqrt{6}.$$

Le componenti contro-varianti degli autovettori sono le soluzioni dei tre sistemi omogenei

$$\begin{pmatrix} -1 - \alpha_k & 1 & -1 \\ 1 & -3 - \alpha_k & 2 \\ -1 & 2 & -3 - \alpha_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{(k)}^1 \\ a_{(k)}^2 \\ a_{(k)}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad k \in \{1, 2, 3\},$$

dove $a_{(k)}^j$ è la j -esima componente contro-variante del k -esimo autovettore, con: $k, j \in \{1, 2, 3\}$. Consideriamo solo il primo e il terzo autovettore, poniamo $a_{(1,3)}^1 = n_{1,3}$ dalla prima e seconda equazione si hanno

$$n_{1,3} (2 \pm \sqrt{6}) + a_{(1,3)}^2 - a_{(1,3)}^3 = 0, \quad n_{1,3} \pm \sqrt{6} a_{(1,3)}^2 + 2 a_{(1,3)}^3 = 0,$$

dalla prima si ottengono le terze componenti come: $a_{(1,3)}^3 = n_{1,3}(2 \pm \sqrt{6}) + a_{(1,3)}^2$ che, sostituite nella seconda

$$n_{1,3} \pm \sqrt{6}a_{(1,3)}^2 + 2n_{1,3}(2 \pm 2\sqrt{6}) + 2a_{(1,3)}^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_{(1,3)}^2 = n_{1,3} \frac{-5 \mp 2\sqrt{6}}{2 \pm \sqrt{6}} = n_{1,3} \frac{-2 \mp \sqrt{6}}{2} = -n_{1,3} \left(1 \pm \sqrt{\frac{3}{2}}\right),$$

le terze componenti sono

$$a_{(1,3)}^3 = n_{1,3}(2 \pm \sqrt{6}) + a_{(1,3)}^2 = n_{1,3} \frac{4 \pm 2\sqrt{6} - 2 \mp \sqrt{6}}{2} = n_{1,3} \frac{2 \pm \sqrt{6}}{2} = a \left(1 \pm \sqrt{\frac{3}{2}}\right).$$

In definitiva, scegliendo i valore di $n_{1,3}$ in modo da normalizzare si hanno

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{6+2\sqrt{6}}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 - \sqrt{3/2} \\ 1 + \sqrt{3/2} \end{pmatrix}, \quad a_3 = \frac{1}{\sqrt{6-2\sqrt{6}}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 + \sqrt{3/2} \\ 1 - \sqrt{3/2} \end{pmatrix},$$

dove si sono usati i valori

$$n_{1,3} = \frac{1}{\sqrt{6 \pm 4\sqrt{3/2}}}.$$

Alla luce dell'omogeneità della funzione razionale $R(x, y, z)$, ovvero del fatto che tutti i termini a numeratore e a denominatore sono quadratici nelle variabili, si ha che, $\forall w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $R(x, y, z) = R(wx, wy, wz)$, quindi i vettori \vec{v}_- e \vec{v}_+ nei quali assume rispettivamente i valori minimo e massimo sono definiti a meno di una costante moltiplicativa. Trascuriamo la normalizzazione e scegliamo

$$\vec{v}_- = (1, -1 - \sqrt{3/2}, 1 + \sqrt{3/2}), \quad \vec{v}_+ = (1, -1 + \sqrt{3/2}, 1 - \sqrt{3/2}).$$

QUINTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si calcoli la trasformata di Fourier della funzione

$$c(x) = \int_{x-a}^x e^{-y^2} \operatorname{sen}(x-y) dy,$$

con $a \in (0, \infty)$.

SOLUZIONE DEL QUINTO PROBLEMA

La funzione $c(x)$ può essere scritta come la convoluzione della funzione gaussiana $g(x) = e^{-x^2}$ e della funzione

$$h(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x) & x \in [0, a] \\ 0 & \text{altrove in } \mathbb{R} \end{cases}.$$

Infatti, usando la funzione gradino θ di Heaviside,

$$\begin{aligned} (g * h)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(y)h(x-y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \operatorname{sen}(x-y)\theta(x-y)\theta(a-x+y)dy \\ &= \int_{-\infty}^x e^{-y^2} \operatorname{sen}(x-y)\theta(a-x+y)dy \\ &= \int_{x-a}^x e^{-y^2} \operatorname{sen}(x-y)dy. \end{aligned}$$

Usiamo, quindi, il teorema della convoluzione

$$\tilde{c}(k) \equiv \mathcal{F}_k[c] = \mathcal{F}_k[g * h] = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}_k[g] \mathcal{F}_k[h],$$

La trasformata di Fourier della funzione gaussiana è nota e vale

$$\mathcal{F}_k[g] = \frac{e^{-k^2/4}}{\sqrt{2}}.$$

Calcoliamo la trasformata di Fourier della funzione $h(x)$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_k[h] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a \text{sen}(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2i\sqrt{2\pi}} \int_0^a (e^{-ix(k-1)} - e^{-ix(k+1)}) dx \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e^{-ia(k-1)} - 1}{1-k} + \frac{e^{-ia(k+1)} - 1}{1+k} \right) \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-iak} [e^{ia} + e^{-ia} + k(e^{ia} - e^{-ia})] - 2}{1-k^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-iak} (\cos(a) + ik \text{sen}(a)) - 1}{k^2 - 1}.\end{aligned}$$

In definitiva

$$\tilde{c}(k) = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}_k[g] \mathcal{F}_k[h] = \frac{e^{-k^2/4}}{\sqrt{2}} \frac{e^{-iak} (\cos(a) + ik \text{sen}(a)) - 1}{k^2 - 1}.$$

SESTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

L'operatore \hat{G} è definito nello spazio di Hilbert a tre dimensioni E_3 dalle azioni sulla terna di vettori ortonormali $\{|t_k\rangle\}_{k=1}^3$

$$\hat{G}|t_1\rangle = |t_2\rangle, \quad \hat{G}|t_2\rangle = |t_3\rangle, \quad \hat{G}|t_3\rangle = |t_1\rangle.$$

Si determini lo spettro discreto dell'operatore \hat{G} .

Infine, si ottenga la matrice $G_e \stackrel{e}{\leftarrow} \hat{G}$, cioè la matrice 3×3 che rappresenta l'operatore \hat{G} rispetto alla base canonica $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^3 \subset E_3$, sapendo che, rispetto alla stessa base, si hanno le rappresentazioni

$$|t_1\rangle \stackrel{e}{\leftarrow} t_{e1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |t_2\rangle \stackrel{e}{\leftarrow} t_{e2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad |t_3\rangle \stackrel{e}{\leftarrow} t_{e3} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

SOLUZIONE DEL SESTO PROBLEMA

La terna di vettori ortonormali $\{|t_k\rangle\}_{k=1}^3$ è una base dello spazio di Hilbert E_3 . Detta G la matrice che rappresenta l'operatore \hat{G} rispetto a questa base si hanno per le tre colonne gli elementi

$$G_1^j = \langle t_j | \hat{G} | t_1 \rangle = \langle t_j | t_2 \rangle = \delta_2^j, \quad G_2^j = \langle t_j | \hat{G} | t_2 \rangle = \langle t_j | t_3 \rangle = \delta_3^j, \quad G_3^j = \langle t_j | \hat{G} | t_3 \rangle = \langle t_j | t_1 \rangle = \delta_1^j,$$

ovvero

$$\hat{G} \stackrel{t}{\leftarrow} G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori sono le soluzioni dell'equazione secolare

$$\begin{aligned}\det(G - I\gamma) &= 0 \\ \det \begin{pmatrix} -\gamma & 0 & 1 \\ 1 & -\gamma & 0 \\ 0 & 1 & -\gamma \end{pmatrix} &= 0 \\ -\gamma^3 + 1 &= 0.\end{aligned}$$

Gli autovalori dell'operatore \hat{G} sono le tre radici terze dell'unità, l'insieme $\{\gamma_k\}_{k=1}^3$ è quindi lo spettro discreto. In dettaglio i tre autovalori sono

$$\gamma_k = e^{2i(k-1)\pi/3}, \quad k = 1, 2, 3,$$

in dettaglio

$$\gamma_1 = 1, \quad \gamma_2 = e^{2i\pi/3} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad \gamma_3 = e^{4i\pi/3} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Le matrici 3×1 che rappresentano i vettori della base $\{|t_k\rangle\}_{k=1}^3$ rispetto alla stessa base sono naturalmente

$$|t_1\rangle \overset{t}{\leftarrow} t_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |t_2\rangle \overset{t}{\leftarrow} t_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |t_3\rangle \overset{t}{\leftarrow} t_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Indichiamo con V la matrice unitaria che trasforma la rappresentazione rispetto alla base $\{|t_k\rangle\}_{k=1}^3$ in quella rispetto alla base canonica $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^3$, si ha

$$t_{ek} = V t_k, \quad k = 1, 2, 3.$$

Consideriamo il j -esimo elemento, con $j = 1, 2, 3$,

$$t_{e(k)}^j = V_l^j t_{(k)}^l = V_l^j \delta_k^l = V_k^j,$$

dove $t_{e(k)}^j$ è la j -esima componente contro-variante della rappresentazione del k -esimo vettore $|t_k\rangle$ rispetto alla base canonica e $t_{(k)}^l$ è la l -esima componente contro-variante della rappresentazione sempre del k -esimo vettore $|t_k\rangle$ ma rispetto alla base $\{|t_k\rangle\}_{k=1}^3$. Si ottiene che l'elemento della j -esima riga e k -esima colonna della matrice V , con $j, k = 1, 2, 3$, coincide con la j -esima componente contro-variante della rappresentazione del k -esimo vettore $|t_k\rangle$ rispetto alla base $\{|t_k\rangle\}_{k=1}^3$, ovvero

$$V = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

La due rappresentazioni delle tre equazioni che definiscono l'operatore \hat{G} sono

$$\begin{aligned} \hat{G}|t_1\rangle &= |t_2\rangle \overset{e,t}{\leftarrow} G_e t_{e1} = t_{e2}, & G t_1 &= t_2, \\ \hat{G}|t_2\rangle &= |t_3\rangle \overset{e,t}{\leftarrow} G_e t_{e3} = t_{e3}, & G t_2 &= t_3, \\ \hat{G}|t_3\rangle &= |t_1\rangle \overset{e,t}{\leftarrow} G_e t_{e1} = t_{e1}, & G t_3 &= t_1. \end{aligned}$$

Consideriamo la rappresentazione della prima equazione rispetto alla base $\{|t_k\rangle\}_{k=1}^3$, moltiplichiamo a sinistra per la matrice unitaria V e sfruttiamo la relazione tra le rappresentazioni,

$$V G t_1 = V t_2 = t_{e2},$$

inseriamo la matrice identità nella forma $I = V^\dagger V$ tra la matrice G e il vettore t_1 a primo membro

$$V G_e \underbrace{V^\dagger V}_{=I} t_1 = V G V^\dagger t_{e1} = t_{e2},$$

confrontiamo con la rappresentazione rispetto alla base canonica della stessa equazione, cioè $G_e t_{e1} = t_{e2}$, si ottiene la relazione che lega le rappresentazioni G_e e G dell'operatore \hat{G} ,

$$G_e = V G V^\dagger.$$

Calcoliamo la matrice G_e

$$\begin{aligned} G_e &= V G V^\dagger \\ &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{18} + 1/\sqrt{6} + 1/\sqrt{12} & 2/\sqrt{18} - 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{18} + 1/\sqrt{6} - 1/\sqrt{12} \\ -1/\sqrt{18} + 2/\sqrt{12} & -2/\sqrt{18} & -1/\sqrt{18} - 2/\sqrt{12} \\ 1/\sqrt{18} - 1/\sqrt{6} + 1/\sqrt{12} & 2/\sqrt{18} + 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{18} - 1/\sqrt{6} - 1/\sqrt{12} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

da cui

$$G_e = \sqrt{18} \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{3} + \sqrt{3/2} & 2 - \sqrt{3} & 1 + \sqrt{3} - \sqrt{3/2} \\ -1 + 2\sqrt{3/2} & -2 & -1 - 2\sqrt{3/2} \\ 1 - \sqrt{3} + \sqrt{3/2} & 2 + \sqrt{3} & 1 - \sqrt{3} - \sqrt{3/2} \end{pmatrix}.$$