

METODI MATEMATICI PER LA FISICA

SECONDO APPELLO INVERNALE - 6 FEBBRAIO 2023

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che il punteggio assegnato a ciascuna procedura di risoluzione può variare tra lo zero e il massimo indicato ed è stabilito valutando:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo.

PRIMO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si calcoli l'integrale in valore principale

$$\Psi = \text{Pr} \int_0^{2\pi} \frac{\tan(\beta)}{\tan(\beta) + 1} d\beta.$$

SOLUZIONE DEL PRIMO PROBLEMA

La funzione integranda ha due poli lungo il percorso d'integrazione, si hanno per

$$\tan(\beta_{1,2}) = -1 \quad \Rightarrow \quad \beta_1 = \frac{3}{4}\pi, \quad \beta_2 = \frac{7}{4}\pi.$$

Sono due poli semplici, infatti

$$\lim_{\beta \rightarrow \beta_{1,2}} \frac{\tan(\beta)}{\tan(\beta) + 1} (\beta - \beta_{1,2}) = \lim_{\beta \rightarrow \beta_{1,2}} \frac{\tan(\beta_{1,2})}{1/\cos^2(\beta)} = \frac{-1}{1/2} = -2.$$

I punti $\beta = \pi/2$ e $\beta = 3\pi/2$, in cui la funzione tangente diverge, sono singolarità eliminabili, infatti si hanno

$$\lim_{\beta \rightarrow \pi/2} \frac{\tan(\beta)}{\tan(\beta) + 1} = \lim_{\beta \rightarrow 3\pi/2} \frac{\tan(\beta)}{\tan(\beta) + 1} = 1.$$

Riscriviamo la funzione integranda in termini delle funzioni seno e coseno

$$\Psi = \text{Pr} \int_0^{2\pi} \frac{\text{sen}(\beta)}{\text{sen}(\beta) + \cos(\beta)} d\beta$$

e facciamo la sostituzione $e^{i\beta} = z$, da cui $\beta = -\ln(z)/i$ e $d\beta = -dz/z$, l'integrale diventa

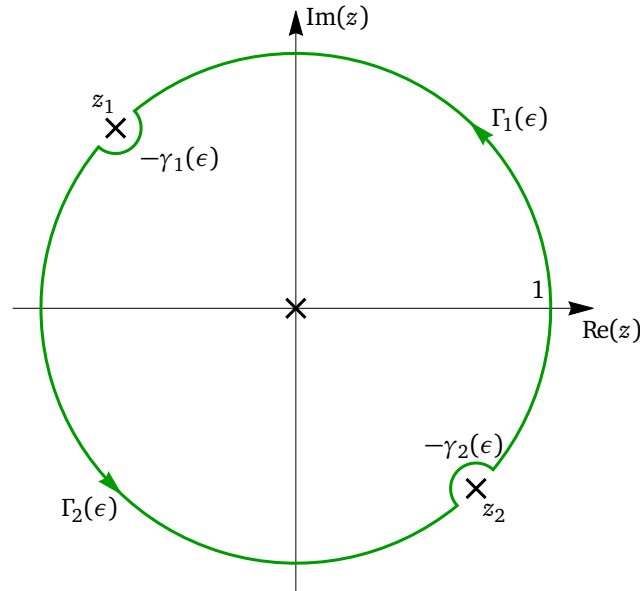
$$\begin{aligned} \Psi &= -i \text{Pr} \oint_{|z|=1} \frac{z^2 - 1}{z^2 - 1 + (z^2 + 1)i} \frac{dz}{z} = -i \text{Pr} \oint_{|z|=1} \frac{z^2 - 1}{z^2(1+i) - (1-i)} \frac{dz}{z} \\ &= \frac{-i}{\sqrt{2}} \text{Pr} \oint_{|z|=1} \frac{z^2 - 1}{z^2 e^{i\pi/4} - e^{7i\pi/4}} \frac{dz}{z} = \frac{-i}{\sqrt{2} e^{i\pi/4}} \text{Pr} \oint_{|z|=1} \frac{z^2 - 1}{z^2 - e^{3i\pi/2}} \frac{dz}{z}, \\ &= \frac{-i}{\sqrt{2} e^{i\pi/4}} \text{Pr} \oint_{|z|=1} \frac{z^2 - 1}{z^2 + i} \frac{dz}{z}. \end{aligned}$$

Il poli semplici della funzione integranda nella variabile z , rispetto ai quali consideriamo il valore principale, sono nei punti $z_{1,2} = e^{i\beta_{1,2}}$, cioè $z_1 = e^{3i\pi/4}$ e $z_2 = e^{7i\pi/4}$, evidenziati in figura dai simboli "x". Studiamo l'integrale della stessa funzione integranda sul percorso chiuso

$$\Gamma_\epsilon = \Gamma_1(\epsilon) \cup \gamma_1(\epsilon) \cup \Gamma_2(\epsilon) \cup \gamma_2(\epsilon),$$

dato dall'unione di quattro semicirconfereze due centrate nell'origine e di raggio unitario, due con centri in z_1 e z_2 di raggio ϵ . La curva è mostrata in verde nella figura. Questo integrale può essere calcolato usando il teorema dei residui e, indipendentemente dal valore di $\epsilon > 0$ e quindi anche nel limite $\epsilon \rightarrow 0^+$, vale

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{-i}{\sqrt{2}e^{i\pi/4}} \oint_{\Gamma_\epsilon} \frac{z^2 - 1}{z^2 + i} \frac{dz}{z} = \frac{\sqrt{2}\pi}{e^{i\pi/4}} \operatorname{Res} \left[\frac{z^2 - 1}{z^2 + i} \frac{1}{z}, 0 \right] = \frac{\sqrt{2}i\pi}{e^{i\pi/4}}.$$



Lo stesso integrale può essere definito come la somma dei quattro contributi relativi agli archi e si ha

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{-i}{\sqrt{2}e^{i\pi/4}} \oint_{\Gamma_\epsilon} \frac{z^2 - 1}{z^2 + i} \frac{dz}{z} &= \frac{-i}{\sqrt{2}e^{i\pi/4}} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{\Gamma_1(\epsilon) \cup \Gamma_2(\epsilon)} \frac{z^2 - 1}{z^2 + i} \frac{dz}{z} + \int_{-\gamma_1(\epsilon)} \frac{z^2 - 1}{z^2 + i} \frac{dz}{z} + \int_{-\gamma_2(\epsilon)} \frac{z^2 - 1}{z^2 + i} \frac{dz}{z} \right) \\ &= \frac{-i}{\sqrt{2}e^{i\pi/4}} \left(\operatorname{Pr} \oint_{|z|=1} \frac{z^2 - 1}{z^2 + i} \frac{dz}{z} - \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\gamma_1(\epsilon)} \frac{z^2 - 1}{z^2 + i} \frac{dz}{z} - \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\gamma_2(\epsilon)} \frac{z^2 - 1}{z^2 + i} \frac{dz}{z} \right). \end{aligned}$$

I valori dei limiti degli ultimi due integrali sono

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\gamma_1(\epsilon)} \frac{z^2 - 1}{z^2 + i} \frac{dz}{z} &= i\pi \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{z^2 - 1}{z^2 + i} \frac{z - e^{3i\pi/4}}{z} = i\pi \frac{e^{3i\pi/2} - 1}{2e^{3i\pi/2}} = i\pi \frac{-i - 1}{-2i} = \pi \frac{1 + i}{2}; \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\gamma_2(\epsilon)} \frac{z^2 - 1}{z^2 + i} \frac{dz}{z} &= i\pi \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{z^2 - 1}{z^2 + i} \frac{z - e^{7i\pi/4}}{z} = i\pi \frac{e^{7i\pi/2} - 1}{2e^{7i\pi/2}} = i\pi \frac{-i - 1}{-2i} = \pi \frac{1 + i}{2}. \end{aligned}$$

Usando l'espressione dell'integrale su Γ_ϵ ottenuta con il teorema dei residui e il precedente risultato, si ricava l'integrale in valore principale cercato come

$$\oint = \frac{-i}{\sqrt{2}e^{i\pi/4}} \operatorname{Pr} \oint_{|z|=1} \frac{z^2 - 1}{z^2 + i} \frac{dz}{z} = \frac{\sqrt{2}i\pi}{e^{i\pi/4}} + \pi(1 + i) \frac{-i}{\sqrt{2}e^{i\pi/4}},$$

scrivendo il primo e secondo termine in rappresentazione cartesiana, ovvero nelle forme

$$\frac{\sqrt{2}}{e^{i\pi/4}} = \sqrt{2}e^{-i\pi/4} = 1 - i, \quad \frac{1}{\sqrt{2}e^{i\pi/4}} = \frac{1}{1 + i},$$

si ha il risultato finale

$$\oint = \frac{\sqrt{2}i\pi}{e^{i\pi/4}} + \pi(1 + i) \frac{-i}{\sqrt{2}e^{i\pi/4}} = i\pi(1 - i) - i\pi = \pi.$$

SECONDO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si calcoli il valore della derivata decima nel punto $z = 1$ della funzione

$$f(z) = \frac{z^4}{(z^2 + 1)(z^3 + 1)}.$$

Suggerimento. Una possibilità è quella di usare la formula integrale di Cauchy.

SOLUZIONE DEL SECONDO PROBLEMA

Usiamo la formula integrale di Cauchy che permette di rappresentare la derivata n -esima di una funzione $f(z)$ analitica nel dominio semplicemente connesso D calcolata nel punto $z_0 \in D$ come l'integrale

$$\frac{d^n f}{dz^n}(z_0) = \frac{n!}{2i\pi} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz,$$

dove $\gamma \subset D$ è una curva chiusa e differenziabile, che avvolge una sola volta il punto z_0 , ovvero $n(z_0, \gamma) = 1$.

La funzione data è meromorfa, ha cinque poli semplici al finito corrispondenti alle due radici quadrate e alle tre radici terze di -1 , ovvero agli elementi degli insiemi $\{z_+ = i, z_- = -i\}$ e $\{z_k = e^{(2k+1)i\pi/3}\}_{k=0}^2$.

Ne consegue che la derivata decima nel punto $z = 1$ può essere calcolata come

$$\frac{d^{10} f}{dz^{10}}(1) = \frac{10!}{2i\pi} \oint_{|z-1|=r} \frac{z^4}{(z^2 + 1)(z^3 + 1)(z - 1)^{11}} dz,$$

dove il raggio della circonferenza centrata nell'unità, che rappresenta il percorso d'integrazione, verifica la condizione: $0 < r < \min\{|1 - z_-|, |1 - z_+|, |1 - z_0|, |1 - z_1|, |1 - z_2|\}$.

D'altro canto, l'integrale della stessa funzione integranda su una circonferenza centrata nell'origine e di raggio $R > 1$ vale

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \oint_{|z|=R} \frac{z^4}{(z^2 + 1)(z^3 + 1)(z - 1)^{11}} dz &= \text{Res} \left[\frac{z^4}{(z^2 + 1)(z^3 + 1)(z - 1)^{11}}, 1 \right] \\ &+ \text{Res} \left[\frac{z^4}{(z^2 + 1)(z^3 + 1)(z - 1)^{11}}, i \right] + \text{Res} \left[\frac{z^4}{(z^2 + 1)(z^3 + 1)(z - 1)^{11}}, -i \right] \\ &+ \sum_{k=0}^2 \text{Res} \left[\frac{z^4}{(z^2 + 1)(z^3 + 1)(z - 1)^{11}}, z_k \right] \\ &= \frac{1}{10!} \frac{d^{10} f}{dz^{10}}(1) \\ &+ \text{Res} \left[\frac{z^4}{(z^2 + 1)(z^3 + 1)(z - 1)^{11}}, i \right] + \text{Res} \left[\frac{z^4}{(z^2 + 1)(z^3 + 1)(z - 1)^{11}}, -i \right] \\ &+ \sum_{k=0}^2 \text{Res} \left[\frac{z^4}{(z^2 + 1)(z^3 + 1)(z - 1)^{11}}, z_k \right], \end{aligned}$$

dove abbiamo scritto il residuo relativo al polo di ordine 11 nel punto $z = 1$ come la derivata decima, valutata nello stesso punto, divisa per 10!. Poiché, nel limite $R \rightarrow \infty$, l'integrale è infinitesimo, infatti, usando le disuguaglianze di Darboux e triangolare, con $R > 1$,

$$\left| \frac{1}{2i\pi} \oint_{|z|=R} \frac{z^4}{(z^2 + 1)(z^3 + 1)(z - 1)^{11}} dz \right| \leq \frac{R^5}{(R^2 - 1)(R^3 - 1)(R - 1)^{11}} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0,$$

dalla indennità precedente si ottiene la derivata cercata come

$$\begin{aligned} \frac{d^{10} f}{dz^{10}}(1) &= -10! \left(\text{Res} \left[\frac{z^4}{(z^2 + 1)(z^3 + 1)(z - 1)^{11}}, i \right] + \text{Res} \left[\frac{z^4}{(z^2 + 1)(z^3 + 1)(z - 1)^{11}}, -i \right] \right. \\ &\left. + \sum_{k=0}^2 \text{Res} \left[\frac{z^4}{(z^2 + 1)(z^3 + 1)(z - 1)^{11}}, z_k \right] \right). \end{aligned}$$

I residui nei poli semplici $z_{\pm} = \pm i$ valgono

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} \left[\frac{z^4}{(z^2+1)(z^3+1)(z-1)^{11}}, \pm i \right] &= \frac{(\pm i)^4}{\pm 2i((\pm i)^3+1)(\pm i-1)^{11}} = \frac{1}{\pm 2i(\mp i+1)(\pm i-1)^{11}} = \frac{1}{\pm 2i(\pm i-1)^{12}} \\ &= \frac{1}{\pm 2i(\sqrt{2}e^{\pm 3i\pi/4})^{12}} = \frac{1}{\pm 2^7 i e^{\pm 9i\pi}} = \mp \frac{i}{2^7}, \end{aligned}$$

sono opposti, hanno quindi somma nulla.

I residui nei poli semplici $z_k = e^{(2k+1)i\pi/3}$, con $k = 0, 1, 2$ sono

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} \left[\frac{z^4}{(z^2+1)(z^3+1)(z-1)^{11}}, z_k \right] &= \frac{z_k^4}{(z_k^2+1)3z_k^2(z_k-1)^{11}} = \frac{z_k^3}{3z_k(z_k^2+1)(z_k-1)^{11}} = \frac{z_k^3}{3(z_k^3+z_k)(z_k-1)^{11}} \\ &= \frac{-1}{3(-1+z_k)(z_k-1)^{11}} = \frac{-1}{3(z_k-1)^{12}}, \end{aligned}$$

dove abbiamo usato l'identità $z_k^3 = -1$, $\forall k \in \{0, 1, 2\}$. Consideriamo i tre casi

$$\operatorname{Res} \left[\frac{z^4}{(z^2+1)(z^3+1)(z-1)^{11}}, z_k \right] = \begin{cases} \frac{-1}{3(-1/2+i\sqrt{3}/2)^{12}} = \frac{-1}{3(e^{2i\pi/3})^{12}} = \frac{-1}{3e^{8i\pi}} = -\frac{1}{3} & k=0 \\ \frac{-1}{3(-2)^{12}} = -\frac{1}{3 \cdot 2^{12}} & k=1 \\ \frac{-1}{3(-1/2-i\sqrt{3}/2)^{12}} = \frac{-1}{3(e^{5i\pi/3})^{12}} = \frac{-1}{3e^{20i\pi}} = -\frac{1}{3} & k=2 \end{cases} .$$

In definitiva

$$\frac{d^{10}}{dz^{10}}(1) = -10! \sum_{k=0}^2 \operatorname{Res} \left[\frac{z^4}{(z^2+1)(z^3+1)(z-1)^{11}}, z_k \right] = \frac{10!}{3} \frac{2^{13}+1}{2^{12}} = 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \frac{2^{13}+1}{2^4},$$

ovvero

$$\frac{d^{10}}{dz^{10}}(1) = \frac{38711925}{16} = 2,4195 \times 10^6.$$

TERZO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si ottenga lo sviluppo di Mittag-Leffler della funzione

$$\mathfrak{L}(z) = \frac{1}{(\operatorname{sen}(z)-1)^2}.$$

SOLUZIONE DEL TERZO PROBLEMA

La funzione $\mathfrak{L}(z)$ è un rapporto di funzioni intere è quindi meromorfa. Ha infiniti poli nei punti dell'insieme $\{z_k = (1+4k)\pi/2\}_{k \in \mathbb{Z}}$. Sono poli di ordine quattro come si evince dalla serie di Laurent centrata nel generico $z_k = (1+4k)\pi/2$, con $k \in \mathbb{Z}$. Al fine di calcolarla, scriviamo la funzione seno come

$$\operatorname{sen}(z) = \operatorname{sen}(z - z_k + z_k) = \operatorname{sen}(z - z_k) \underbrace{\cos(z_k)}_{=0} + \cos(z - z_k) \underbrace{\operatorname{sen}(z_k)}_{=1} = \cos(z - z_k).$$

Usando la serie di Taylor della funzione $\cos(z - z_k)$ centrata in $z = z_k$, si ha

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}(z) &= \frac{1}{(\cos(z - z_k) - 1)^2} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j)!} (z - z_k)^{2j} - 1 \right)^{-2} = \left(\frac{(z - z_k)^2}{2!} - \frac{(z - z_k)^4}{4!} + \dots \right)^{-2} \\ &= \frac{4}{(z - z_k)^4} \left(1 - 2 \frac{(z - z_k)^2}{4!} + 2 \frac{(z - z_k)^4}{6!} + \dots \right)^{-2}. \end{aligned}$$

Il secondo fattore può essere interpretato come la derivata prima della somma della serie geometrica di ragione $\alpha = 2(z - z_k)^2/4! + 2(z - z_k)^4/6! + \dots$, ovvero, con $|\alpha| < 1$,

$$\frac{1}{(1 - \alpha)^2} = \frac{d}{d\alpha} \frac{1}{1 - \alpha} = \frac{d}{d\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k = \sum_{k=1}^{\infty} k\alpha^{k-1},$$

da cui si ha

$$\begin{aligned} \mathfrak{W}(z) &= \frac{4}{(z - z_k)^4} \left(1 - 2\frac{(z - z_k)^2}{4!} + 2\frac{(z - z_k)^4}{6!} + \dots \right)^{-2} \\ &= \frac{4}{(z - z_k)^4} \left[1 + 2 \left(2\frac{(z - z_k)^2}{4!} - 2\frac{(z - z_k)^4}{6!} + \dots \right) + 3 \left(2\frac{(z - z_k)^2}{4!} - 2\frac{(z - z_k)^4}{6!} + \dots \right)^2 + \dots \right] \\ &= \frac{4}{(z - z_k)^4} + \frac{2 \cdot 2 \cdot 4/4!}{(z - z_k)^2} + \mathcal{O}(1) \\ &= \frac{4}{(z - z_k)^4} + \frac{2/3}{(z - z_k)^2} + \mathcal{O}(1), \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Lo sviluppo di Mittag-Leffler ha la forma

$$\mathfrak{W}(z) = \phi(z) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{4}{(z - z_k)^4} + \frac{2/3}{(z - z_k)^2} \right) = \phi(z) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{4}{(z - (1 + 4k)\pi/2)^4} + \frac{2/3}{(z - (1 + 4k)\pi/2)^2} \right),$$

dove la funzione $\phi(z)$ rappresenta la parte intera della funzione $\mathfrak{W}(z)$ e ha lo stesso comportamento asintotico, ovvero

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \phi(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \mathfrak{W}(z).$$

Verifichiamo che la funzione $\mathfrak{W}(z)$ è regolare all'infinito, studiandone il valore limite sui punti della successione $\{a_k = (z_k + z_{k+1})/2 = (3 + 4k)\pi/2\}_{k=0}^{\infty}$, i cui termini sono i punti medi dei segmenti di retta che hanno per estremi due poli successivi positivi e che ha, quindi, intersezione vuota con l'insieme dei poli e si accumula all'infinito, si ha

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathfrak{W}(a_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{(\sin(z_k) - 1)^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{(\sin(3\pi/2 + 2k\pi) - 1)^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{(\sin(3\pi/2) - 1)^2} = \frac{1}{4}.$$

Ne consegue che la funzione $\phi(z)$ è costante. Possiamo ottenerne il valore ϕ_0 come

$$\mathfrak{W}(0) = \phi_0 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{4}{(1 + 4k)^4 \pi^4 / 2^4} + \frac{2/3}{(1 + 4k)^2 \pi^2 / 2^2} \right) = \phi_0 + \frac{64}{\pi^4} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1 + 4k)^4} + \frac{8}{3\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1 + 4k)^2},$$

poiché $\mathfrak{W}(0) = 1$, si ottiene

$$\phi_0 = 1 - \frac{64}{\pi^4} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1 + 4k)^4} - \frac{8}{3\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1 + 4k)^2}.$$

Calcoliamo le due serie precedenti usando il metodo dei residui. Per la prima si ha

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1 + 4k)^4} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k),$$

con $f(z) = 1/(1 + 4z)^4$. Studiamo, $\forall n \in \mathbb{N}$, l'integrale

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_{|z|=n+1/2} \frac{\pi \cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} \frac{1}{(1 + 4z)^4} dz = \sum_{k=-n}^n \operatorname{Res} \left[\frac{\pi \cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} \frac{1}{(1 + 4z)^4}, k \right] + \operatorname{Res} \left[\frac{\pi \cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} \frac{1}{(1 + 4z)^4}, -1/4 \right],$$

nel limite $n \rightarrow \infty$, l'integrale è nullo quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n \operatorname{Res} \left[\frac{\pi \cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} \frac{1}{(1 + 4z)^4}, k \right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1 + 4k)^4} = -\operatorname{Res} \left[\frac{\pi \cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} \frac{1}{(1 + 4z)^4}, -1/4 \right].$$

La funzione integranda ha nel punto $z = -1/4$ un polo di ordine quattro, quindi

$$\operatorname{Res} \left[\frac{\pi \cos(\pi z)}{\operatorname{sen}(\pi z)} \frac{1}{(1+4z)^4}, -1/4 \right] = \operatorname{Res} \left[\frac{\pi \cos(\pi z)}{\operatorname{sen}(\pi z)} \frac{1}{4^4(z+1/4)^4}, -1/4 \right] = \frac{\pi}{3!4^4} \frac{d^3 \cos(\pi z)}{dz^3} \Big|_{z=-1/4},$$

la derivata terza è

$$\frac{d^3 \cos(\pi z)}{dz^3 \operatorname{sen}(\pi z)} = -\pi \frac{d^2}{dz^2} \frac{1}{\operatorname{sen}^2(\pi z)} = 2\pi^2 \frac{d}{dz} \frac{\cos(\pi z)}{\operatorname{sen}^3(\pi z)} = -2\pi^3 \frac{\operatorname{sen}^2(\pi z) + 3 \cos^2(\pi z)}{\operatorname{sen}^4(\pi z)},$$

in $z = -1/4$ si ha

$$\frac{d^3 \cos(\pi z)}{dz^3 \operatorname{sen}(\pi z)} \Big|_{z=-1/4} = -2\pi^3 \frac{1/2 + 3/2}{1/4} = -16\pi^3$$

e la somma della serie è

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+4k)^4} = -\operatorname{Res} \left[\frac{\pi \cos(\pi z)}{\operatorname{sen}(\pi z)} \frac{1}{(1+4z)^4}, -1/4 \right] = -\frac{\pi}{3!4^4} (-16\pi^3) = \frac{\pi^4}{96}.$$

Per la somma della seconda serie usiamo la definizione

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+4k)^2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k),$$

dove $g(z) = 1/(1+4z)^2$. Studiamo, $\forall n \in \mathbb{N}$, l'integrale

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_{|z|=n+1/2} \frac{\pi \cos(\pi z)}{\operatorname{sen}(\pi z)} \frac{1}{(1+4z)^2} dz = \sum_{k=-n}^n \operatorname{Res} \left[\frac{\pi \cos(\pi z)}{\operatorname{sen}(\pi z)} \frac{1}{(1+4z)^2}, k \right] + \operatorname{Res} \left[\frac{\pi \cos(\pi z)}{\operatorname{sen}(\pi z)} \frac{1}{(1+4z)^2}, -1/4 \right],$$

nel limite $n \rightarrow \infty$, l'integrale è nullo quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n \operatorname{Res} \left[\frac{\pi \cos(\pi z)}{\operatorname{sen}(\pi z)} \frac{1}{(1+4z)^2}, k \right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+4k)^2} = -\operatorname{Res} \left[\frac{\pi \cos(\pi z)}{\operatorname{sen}(\pi z)} \frac{1}{(1+4z)^2}, -1/4 \right].$$

La funzione integranda ha nel punto $z = -1/4$ un polo doppio, quindi

$$\operatorname{Res} \left[\frac{\pi \cos(\pi z)}{\operatorname{sen}(\pi z)} \frac{1}{(1+4z)^2}, -1/4 \right] = \operatorname{Res} \left[\frac{\pi \cos(\pi z)}{\operatorname{sen}(\pi z)} \frac{1}{4^2(z+1/4)^2}, -1/4 \right] = \frac{\pi}{4^2} \frac{d \cos(\pi z)}{dz} \Big|_{z=-1/4},$$

la derivata prima è

$$\frac{d \cos(\pi z)}{dz \operatorname{sen}(\pi z)} = -\pi \frac{1}{\operatorname{sen}^2(\pi z)},$$

in $z = -1/4$ si ha

$$\frac{d \cos(\pi z)}{dz \operatorname{sen}(\pi z)} \Big|_{z=-1/4} = -\pi \frac{1}{1/2} = -2\pi$$

e la somma della serie è

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+4k)^2} = -\operatorname{Res} \left[\frac{\pi \cos(\pi z)}{\operatorname{sen}(\pi z)} \frac{1}{(1+4z)^2}, -1/4 \right] = -\frac{\pi}{4^2} (-2\pi) = \frac{\pi^2}{8}.$$

Usando questi risultati si ottiene che il valore costante ϕ_0 è nullo, infatti

$$\phi_0 = 1 - \frac{64}{\pi^4} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+4k)^4} - \frac{8}{3\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+4k)^2} = 1 - \frac{64}{\pi^4} \frac{\pi^4}{96} - \frac{8}{3\pi^2} \frac{\pi^2}{8} = 1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = 0.$$

In definitiva, lo sviluppo di Mittag-Leffler è

$$\zeta(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{4}{(z - (1 + 4k)\pi/2)^4} + \frac{2/3}{(z - (1 + 4k)\pi/2)^2} \right).$$

QUARTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si consideri l'equazione differenziale operatoriale

$$i \frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = \hat{E}|\psi(t)\rangle,$$

dove $|\psi(t)\rangle$ è il vettore incognito, dipendente dal parametro reale $t \in \mathbb{R}$, appartenente allo spazio di Hilbert bidimensionale H_2 in cui è definito l'operatore \hat{E} , che, rispetto alla base canonica, è rappresentato dalla matrice

$$\hat{E} \leftrightarrow E = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Si ottenga la rappresentazione matriciale rispetto alla stessa base canonica del vettore dipendente dal parametro reale t , $|\psi(t)\rangle$, sapendo che

$$|\psi(0)\rangle \leftrightarrow \psi(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

SOLUZIONE DEL QUARTO PROBLEMA

La rappresentazione matriciale dell'equazione differenziale è

$$i \frac{d\psi(t)}{dt} = \hat{E}\psi(t) \leftrightarrow i \frac{d\psi(t)}{dt} = E\psi(t).$$

L'operatore \hat{E} è diagonalizzabile essendo hermitiano, come si evince dalla matrice simmetrica e reale che lo rappresenta rispetto a una base ortonormale. Ne consegue che esiste una matrice unitaria U , che diagonalizza la matrice E , ovvero tale che

$$U^\dagger E U = E_d = \text{diag}(e_1, e_2),$$

dove e_1 ed e_2 sono i due autovalori reali dell'operatore \hat{E} . Questi si ottengono come soluzioni dell'equazione secolare

$$\begin{aligned} \det(E - eI) &= 0 \\ \frac{1}{25} \det \begin{pmatrix} 3 - 5e & -4 \\ -4 & -3 - 5e \end{pmatrix} &= 0 \\ -9 + 25e^2 - 16 &= 0 \\ e^2 - 1 &= 0, \end{aligned}$$

quindi $e_{1,2} = \mp 1$. Gli autovettori sono rappresentati dai vettori le cui componenti si ottengono come soluzioni dei due sistemi omogenei

$$\begin{pmatrix} 3 - 5e_j & -4 \\ -4 & -3 - 5e_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_j^1 \\ v_j^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2,$$

dove v_j^k indica la k -esima componente contro-variante del j -esimo vettore, con $k, j \in \{1, 2\}$. Posti $v_1^1 = v_2^1 = v$, con v reale positivo, si hanno le seconde componenti contro-varianti

$$v_j^2 = \frac{(3 - 5e_j)v}{4} = \begin{cases} 2v & j = 1, e_1 = -1 \\ -v/2 & j = 2, e_2 = 1 \end{cases}.$$

Normalizzando all'unità, i vettori che rappresentano gli autovettori sono

$$v_1 = \frac{1}{v\sqrt{5}} \begin{pmatrix} v \\ 2v \end{pmatrix} = \{v = 1\} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{v\sqrt{5}/2} \begin{pmatrix} v \\ -v/2 \end{pmatrix} = \{v = 2\} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice unitaria diagonalizzante si ottiene allineando lungo le colonne le componenti degli autovettori normalizzati, cioè

$$U = \begin{pmatrix} v_1^1 & v_2^1 \\ v_1^2 & v_2^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

La versione diagonale dell'equazione differenziale si ottiene moltiplicando da sinistra per U l'equazione originaria e inserendo la matrice identità nella forma $I = UU^\dagger$ tra la matrice E e il vettore $\psi(t)$ a secondo membro. Si ha

$$U^\dagger i \frac{d\psi(t)}{dt} = U^\dagger E U U^\dagger \psi(t) \quad \Rightarrow \quad i \frac{d\psi_d(t)}{dt} = E_d \psi_d(t),$$

dove abbiamo definito il vettore

$$\psi_d(t) = U^\dagger \psi(t).$$

Poiché E_d è una matrice diagonale, l'equazione differenziale matriciale si separa in due equazioni scalari indipendenti per ciascuna delle componenti, ovvero si ha

$$i \begin{pmatrix} \frac{d\psi_d^1(t)}{dt} \\ \frac{d\psi_d^2(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \psi_d^1(t) \\ e_2 \psi_d^2(t) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} i \frac{d\psi_d^1(t)}{dt} = e_1 \psi_d^1(t) \\ i \frac{d\psi_d^2(t)}{dt} = e_2 \psi_d^2(t) \end{cases},$$

dove $\psi_d^j(t)$, con $j = 1, 2$, indica la j -esima componente contro-variante del vettore $\psi_d(t)$. Integrando le due equazioni per le singole componenti si hanno le soluzioni

$$\psi_d^j(t) = \psi_d^j(0) e^{-ie_j t}, \quad j = 1, 2,$$

quindi il vettore nella rappresentazione diagonale è

$$\psi_d(t) = \begin{pmatrix} \psi_d^1(0) e^{-ie_1 t} \\ \psi_d^2(0) e^{-ie_2 t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_d^1(0) e^{it} \\ \psi_d^2(0) e^{-it} \end{pmatrix}.$$

La rappresentazione rispetto alla base canonica è data dalla trasformazione inversa tramite la matrice U , ovvero

$$\psi(t) = U \psi_d(t) = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_d^1(0) e^{it} \\ \psi_d^2(0) e^{-it} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \psi_d^1(0) e^{it} + 2\psi_d^2(0) e^{-it} \\ 2\psi_d^1(0) e^{it} - \psi_d^2(0) e^{-it} \end{pmatrix}.$$

Le componenti della rappresentazione diagonale con $t = 0$ si ottengono, infine, dalla condizione

$$\psi(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

che implica

$$\psi(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \psi_d^1(0) + 2\psi_d^2(0) \\ 2\psi_d^1(0) - \psi_d^2(0) \end{pmatrix},$$

da cui si ha il sistema lineare 2×2

$$\begin{cases} \psi_d^1(0) + 2\psi_d^2(0) = \sqrt{5/2} \\ 2\psi_d^1(0) - \psi_d^2(0) = \sqrt{5/2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \psi_d^1(0) = \frac{\det \begin{pmatrix} \sqrt{5/2} & 2 \\ \sqrt{5/2} & -1 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}} = \frac{-3\sqrt{5/2}}{-5} = \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \psi_d^2(0) = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{5/2} \\ 2 & \sqrt{5/2} \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}} = \frac{-\sqrt{5/2}}{-5} = \frac{1}{\sqrt{10}} \end{cases}.$$

Usando questi risultati si ha la soluzione

$$\psi(t) = \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3e^{it} + 2e^{-it} \\ 6e^{it} - e^{-it} \end{pmatrix}.$$

QUINTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si ottenga la matrice

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} B^{-1}(x) dx,$$

dove $B(x)$ è la matrice 3×3

$$B(x) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x^4 + x^2 + 2 & -x^4 + x^2 & 0 \\ -x^4 + x^2 & x^4 + x^2 + 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2x^6 + 2 \end{pmatrix}.$$

SOLUZIONE DEL QUINTO PROBLEMA

La matrice $B(x)$, $\forall z \in \mathbb{R}$ è hermitiana, quindi è diagonalizzabile, ovvero esiste una matrice unitaria U tale che

$$U^\dagger B(x) U = B_d(x) = \text{diag}(\beta_1(x), \beta_2(x), \beta_3(x)),$$

dove $\{\beta_k(z)\}_{k=1}^3$ è lo spettro discreto della matrice $B(x)$, i cui elementi, gli autovalori, sono funzioni di x . La rappresentazione diagonale della matrice A si ottiene come

$$A_d = U^\dagger A U = \int_{-\infty}^{\infty} B_d^{-1}(x) dx = \text{diag} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\beta_1(x)}, \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\beta_2(x)}, \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\beta_3(x)} \right).$$

Calcoliamo gli autovalori della matrice $B(x)$ come soluzioni dell'equazione secolare

$$\frac{1}{4} \det \begin{pmatrix} x^4 + x^2 + 2 - 2\beta(x) & -x^4 + x^2 & 0 \\ -x^4 + x^2 & x^4 + x^2 + 2 - 2\beta(x) & 0 \\ 0 & 0 & 2x^6 + 2 - 2\beta(x) \end{pmatrix} = 0,$$

posto: $r(x) = x^4 + x^2 + 2$, $s(x) = -x^4 + x^2$ e $t(x) = 2x^6 + 2$ e si ha

$$\det \begin{pmatrix} r(x) - 2\beta(x) & s(x) & 0 \\ s(x) & r(x) - 2\beta(x) & 0 \\ 0 & 0 & t(x) - 2\beta(x) \end{pmatrix} = 0$$

$$[(r(x) - 2\beta(x))^2 - s^2(x)](t(x) - 2\beta(x)) = 0,$$

da cui

$$\beta_{1,2}(x) = \frac{r(x) \pm s(x)}{2} = \begin{cases} x^2 + 1 & k = 1 \\ x^4 + 1 & k = 2 \end{cases}, \quad \beta_3(x) = \frac{t(x)}{2} = x^6 + 1.$$

La matrice diagonale A_d è

$$A_d = \text{diag} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1}, \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1}, \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^6 + 1} \right).$$

I tre integrali posso essere calcolati usando il lemma di Jordan, considerando un percorso chiuso nel semipiano delle parti immaginarie positive, che include i poli delle funzioni integrande appartenenti a tale semipiano. Si hanno

$$\begin{aligned}(A_d)_1^1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = 2i\pi \operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^2+1}, i\right] = 2i\pi \frac{1}{2i} = \pi; \\(A_d)_2^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} = 2i\pi \left(\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^4+1}, e^{i\pi/4}\right] + \operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^4+1}, e^{3i\pi/4}\right] \right) = \frac{2i\pi}{4} \left((e^{-i\pi/4})^3 + (e^{-3i\pi/4})^3 \right) \\ &= \frac{i\pi}{2} (e^{-3i\pi/4} + e^{-i\pi/4}) = \frac{i\pi}{2} \left(\frac{-1-i}{\sqrt{2}} + \frac{1-i}{\sqrt{2}} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}; \\(A_d)_3^3 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^6+1} = 2i\pi \left(\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^6+1}, e^{i\pi/6}\right] + \operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^6+1}, e^{\pi/2}\right] + \operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^6+1}, e^{5i\pi/6}\right] \right) \\ &= \frac{2i\pi}{6} \left((e^{-i\pi/6})^5 + (e^{-i\pi/2})^5 + (e^{-5i\pi/6})^5 \right) \\ &= \frac{i\pi}{3} (e^{-5i\pi/6} + e^{-i\pi/2} + e^{-i\pi/6}) = \frac{i\pi}{3} \left(\frac{-\sqrt{3}-i}{2} - i + \frac{\sqrt{3}-i}{2} \right) = \frac{2\pi}{3},\end{aligned}$$

quindi la rappresentazione diagonale della matrice è

$$A_d = \pi \operatorname{diag}\left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{2}{3}\right).$$

Per ottenere la rappresentazione rispetto alla base canonica calcoliamo la matrice U , i cui elementi sono le componenti degli autovettori della matrice $B(x)$. Queste si ottengono come soluzioni dei sistemi omogenei

$$\begin{pmatrix} r(x) - 2\beta_k(x) & s(x) & 0 \\ s(x) & r(x) - 2\beta_k(x) & 0 \\ 0 & 0 & t(x) - 2\beta_k(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_k^1 \\ b_k^2 \\ b_k^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad k \in \{1, 2, 3\},$$

dove b_k^j è la j -esima componente contro-variante del k -esimo autovettore, con $j, k \in \{1, 2, 3\}$. Per i primi due autovettori, con autovalori $\beta_{1,2}(x) = (r(x) \pm s(x))/2$, si hanno i sistemi

$$\begin{pmatrix} \mp s(x) & s(x) & 0 \\ s(x) & \mp s(x) & 0 \\ 0 & 0 & t(x) - r(x) \mp s(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,2}^1 \\ b_{1,2}^2 \\ b_{1,2}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

poiché la funzione $t(x) - r(x) \mp s(x)$ non è identicamente nulla in \mathbb{R} , si ha $b_1^3 = b_2^3 = 0$, inoltre, assegnando alle prime componenti il valore comune $b_1^1 = b_2^1 = \nu$, le seconde componenti sono $b_{1,2}^2 = \pm\nu$. I primi due autovettori, scelto $\nu = 1$, sono

$$v_1 = \frac{1}{\nu\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \nu \\ \nu \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{\nu\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \nu \\ -\nu \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Per il terzo autovettore, che ha autovalore $\beta_3(x) = t(x)/2$, si ha

$$\begin{pmatrix} r(x) - t(x) & s(x) & 0 \\ s(x) & r(x) - t(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_3^1 \\ b_3^2 \\ b_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

in questo caso, poiché le funzioni $r(x) - t(x)$ e $s(x)$ sono diverse in \mathbb{R} , si ha $b_3^1 = b_3^2 = 0$, quindi, posto $b_3^3 = 1$, il terzo autovettore è

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice unitaria diagonalizzante U ha elementi $U_k^j = v_k^j$, con $j, k \in \{1, 2, 3\}$. Ovvero, l'elemento della j -esima riga e k -esima colonna è la j -esima componente contro-variante del k -esimo autovettore, quindi

$$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice A si ottiene trasformando la matrice diagonale A_d come

$$\begin{aligned} A &= UA_dU^\dagger \\ &= \pi \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \pi \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/2 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \pi \begin{pmatrix} (1+1/\sqrt{2})/2 & (1-1/\sqrt{2})/2 & 0 \\ (1-1/\sqrt{2})/2 & (1+1/\sqrt{2})/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

SESTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si dimostri che, dati due operatori diagonalizzabili \hat{A} e \hat{B} vale la disuguaglianza

$$|\text{Tr}(\hat{A}^\dagger \hat{B})|^2 \leq \text{Tr}(\hat{A}^\dagger \hat{A}) \text{Tr}(\hat{B}^\dagger \hat{B}).$$

Si dimostri, inoltre, che nel caso di un operatore normale \hat{T} , definito in uno spazio di Hilbert a $N \in \mathbb{N}$ dimensioni, vale la relazione

$$\text{Tr}(\hat{T}^\dagger \hat{T}) = \sum_{k,j=1}^N |T_k^j|^2 = \sum_{j=1}^N |\tau_j|^2,$$

dove T_k^j è l'elemento della j -esima riga e k -esima colonna della matrice $N \times N$ che rappresenta l'operatore rispetto alla base canonica e l'insieme $\{\tau_j\}_{j=1}^N$ è lo spettro discreto dello stesso operatore. Infine si verifichi la relazione nel caso particolare in cui $N = 3$ e

$$T = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

è la matrice che rappresenta l'operatore \hat{T} rispetto alla base canonica.

SOLUZIONE DEL SESTO PROBLEMA

Usiamo la procedura adottata per la dimostrazione della disuguaglianza di Schwarz. Definiamo un operatore di lavoro

$$\hat{C} = \hat{A} + t \text{Tr}(\hat{B}^\dagger \hat{A}) \hat{B},$$

dove t è un parametro reale. Calcoliamo la traccia $\text{Tr}(\hat{C}^\dagger \hat{C})$, si ha

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\hat{C}^\dagger \hat{C}) &= \text{Tr}[(\hat{A}^\dagger + t \text{Tr}(\hat{A}^\dagger \hat{B}) \hat{B}^\dagger)(\hat{A} + t \text{Tr}(\hat{B}^\dagger \hat{A}) \hat{B})] \\ &= \text{Tr}(\hat{A}^\dagger \hat{A} + t^2 \text{Tr}(\hat{A}^\dagger \hat{B}) \text{Tr}(\hat{B}^\dagger \hat{A}) \hat{B}^\dagger \hat{B} + t \text{Tr}(\hat{B}^\dagger \hat{A}) \hat{A}^\dagger \hat{B} + t \text{Tr}(\hat{A}^\dagger \hat{B}) \hat{B}^\dagger \hat{A}) \\ &= \text{Tr}(\hat{A}^\dagger \hat{A}) + t^2 \underbrace{\text{Tr}(\hat{A}^\dagger \hat{B}) \text{Tr}(\hat{B}^\dagger \hat{A}) \text{Tr}(\hat{B}^\dagger \hat{B})}_{=|\text{Tr}(\hat{A}^\dagger \hat{B})|^2} + 2t \underbrace{\text{Tr}(\hat{A}^\dagger \hat{B}) \text{Tr}(\hat{B}^\dagger \hat{A})}_{=|\text{Tr}(\hat{A}^\dagger \hat{B})|^2}. \end{aligned}$$

Dimostriamo che, in generale, ovvero, per ogni operatore \hat{O} diagonalizzabile, definito in uno spazio di Hilbert a $N \in \mathbb{N}$ dimensioni, si ha: $\text{Tr}(\hat{O}^\dagger \hat{O}) \geq 0$. Poiché la traccia è invariante, cioè non dipende dalla rappresentazione, la calcoliamo usando una generica rappresentazione e indichiamo con O la matrice $N \times N$ che rappresenta lo stesso operatore. Ne consegue che la traccia può essere calcolata come

$$\text{Tr}(\hat{O}^\dagger \hat{O}) = (O^\dagger O)_k^k = (O^\dagger)_j^k O_k^j = \sum_{k,j=1}^N O_k^{j*} O_k^j = \sum_{k,j=1}^N |O_k^j|^2 \geq 0,$$

dove abbiamo considerato la somma sottintesa per le coppie di indici ripetuti in posizione covariante e controvariante. La disuguaglianza finale è immediata in quanto si ha la somma di moduli quadri, che sono quantità reali non negative. La traccia, oggetto della dimostrazione, è quindi non negativa così come le tracce $\text{Tr}(\hat{A}^\dagger \hat{A})$ e $\text{Tr}(\hat{B}^\dagger \hat{B})$. Si ha quindi che la stessa traccia

$$\text{Tr}(\hat{C}^\dagger \hat{C}) = t^2 |\text{Tr}(\hat{A}^\dagger \hat{B})|^2 \text{Tr}(\hat{B}^\dagger \hat{B}) + 2t |\text{Tr}(\hat{A}^\dagger \hat{B})|^2 + \text{Tr}(\hat{A}^\dagger \hat{A}),$$

rappresenta un polinomio di secondo grado nella variabile reale t , con coefficienti non negativi, che risulta non negativo $\forall t \in \mathbb{R}$. Riportandone i valori lungo l'asse delle ordinate di un piano cartesiano, in funzione del parametro reale t , rappresentato sull'asse delle ascisse, si ottiene una parabola con la concavità rivolta verso l'alto, poiché il coefficiente di t^2 è non negativo, che o appartiene strettamente al semipiano delle ascisse positive, se $\text{Tr}(\hat{C}^\dagger \hat{C}) > 0$, ovvero è tangente all'asse delle ascisse, se invece $\text{Tr}(\hat{C}^\dagger \hat{C}) = 0$. Ne consegue che il discriminante deve verificare la disuguaglianza

$$\left(\frac{[\text{coefficiente di } t]}{2} \right)^2 - [\text{coefficiente di } t^2][\text{termine noto}] \leq 0,$$

in particolare, è strettamente minore di zero, se $\text{Tr}(\hat{C}^\dagger \hat{C}) > 0$, uguale a zero, se invece $\text{Tr}(\hat{C}^\dagger \hat{C}) = 0$. La disuguaglianza con i coefficienti ottenuti è

$$|\text{Tr}(\hat{A}^\dagger \hat{B})|^4 - |\text{Tr}(\hat{A}^\dagger \hat{B})|^2 \text{Tr}(\hat{B}^\dagger \hat{B}) \text{Tr}(\hat{A}^\dagger \hat{A}) \leq 0,$$

che, dividendo per $|\text{Tr}(\hat{A}^\dagger \hat{B})|^2 \geq 0$, implica la disuguaglianza cercata, cioè

$$|\text{Tr}(\hat{A}^\dagger \hat{B})|^2 \leq \text{Tr}(\hat{B}^\dagger \hat{B}) \text{Tr}(\hat{A}^\dagger \hat{A}).$$

Nel caso dell'operatore normale \hat{T} , come già dimostrato per un generico operatore diagonalizzabile, si ha che, detta T la matrice che lo rappresenta rispetto alla base canonica e indicando con T_k^j l'elemento della j -esima riga e k -esima colonna della stessa matrice, vale l'identità

$$\text{Tr}(\hat{T}^\dagger \hat{T}) = \sum_{k,j=1}^N |T_k^j|^2.$$

L'operatore è normale, commuta, quindi, con il suo aggiunto, ciò implica che i due operatori \hat{T} e \hat{T}^\dagger siano diagonalizzabili simultaneamente, ovvero che siano rappresentati rispetto alla stessa base ortonormale di autovettori comuni da matrici diagonali, che sono l'una la coniugata complessa dell'altra, ovvero, indicando con $\{|t_k\rangle\}_{k=1}^N$ l'insieme ortonormale degli autovettori comuni, si hanno le equazioni agli autovalori

$$\hat{T}|t_k\rangle = \tau_k |t_k\rangle, \quad \hat{T}^\dagger |t_k\rangle = \tau_k^* |t_k\rangle, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

Le matrici diagonali, che li rappresentano rispetto alla base degli autovettori, sono

$$\hat{T} \leftrightarrow T_d = \text{diag}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N), \quad \hat{T}^\dagger \leftrightarrow T_d^\dagger = T_d^* = \text{diag}(\tau_1^*, \tau_2^*, \dots, \tau_N^*).$$

Poiché la traccia è invariante, cioè non dipende dalla rappresentazione, possiamo calcolarne il valore considerando nella rappresentazione diagonale e si ha l'identità richiesta, infatti

$$\text{Tr}(\hat{T}^\dagger \hat{T}) = \sum_{k,j=1}^N |(T_d)_k^j|^2 = \sum_{k,j=1}^N |\delta_k^j \tau_j|^2 = \sum_{j=1}^N |\tau_j|^2.$$

Per verificarla, nel caso particolare del problema, calcoliamo gli autovalori risolvendo l'equazione secolare

$$\begin{aligned} \det(T - I\tau) &= 0 \\ \frac{1}{27} \det \begin{pmatrix} 4-3\tau & 4 & 1 \\ 4 & 1-3\tau & 4 \\ 1 & 4 & 4-3\tau \end{pmatrix} &= 0 \\ \frac{(4-3\tau)[(1-3\tau)(4-3\tau)-16]-4[4(4-3\tau)-4]+16-1+3\tau}{27} &= 0 \\ \frac{(4-3\tau)(9\tau^2-15\tau-12)+51\tau-33}{27} &= 0 \\ -\tau^3+3\tau^2+\tau-3 &= 0. \end{aligned}$$

È immediato verificare che $\tau_1 = -1$ è una soluzione per cui si ha

$$-\tau^3 + 3\tau^2 + \tau - 3 = -(\tau + 1)(\tau^2 - 4\tau + 3) = 0,$$

ne consegue che le altre due soluzioni sono $\tau_2 = 1$ e $\tau_3 = 3$. La somma dei moduli quadri di questi autovalori è

$$\sum_{k=1}^3 |\tau_k|^2 = 11.$$

Ta traccia del prodotto della matrice aggiunta T^\dagger e la stessa matrice T ha lo stesso valore, infatti

$$\text{Tr} \left[\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{9} \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} 33 & 24 & 24 \\ 24 & 33 & 24 \\ 24 & 24 & 33 \end{pmatrix} \right] = \frac{99}{9} = 11.$$

Abbiamo così dimostrato l'identità cercata nel caso particolare proposto dal problema.