Metodi Matematici per la Fisica

Primo appello autunnale - 30 settembre 2024

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che il punteggio assegnato a ciascuna procedura di risoluzione può variare tra lo zero e il massimo indicato ed è stabilito valutando:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo;
6. la bellezza e l'armonia del tutto.

Primo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$\text{☼} = \int_0^{2\pi} e^{e^{2i\theta} - 2Ni\theta} \, d\theta \,,$$

con $N \in \mathbb{N}$.

Curiosità. Il simbolo ☼ è quello della spia che nel cruscotto delle automobili si accende quando le luci di posizione sono accese.

Soluzione del primo problema

Facciamo la sostituzione $z = e^{i\theta}$

$$\text{☼} = \oint_{|z|=1} e^{z^2} z^{-2N} \frac{dz}{iz} = -i \oint_{|z|=1} \frac{e^{z^2}}{z^{2N+1}} dz \,.$$

Usiamo la formula integrale di Cauchy per la derivata k-esima, con $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, si ha

$$\frac{d^k f}{dz^k}(z_0) = \frac{k!}{2i\pi} \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz \,,$$

dove $f(z)$ è una funzione analitica in un dominio semplicemente connesso D, il punto z_0 appartiene a D, cioè $z_0 \in D$ e la curva γ è chiusa, contenuta in D e avvolge una sola volta il punto z_0, ovvero $\gamma \subset D$ e $n(z_0, \gamma) = 1$. La funzione e^{z^2} è intera, la circonferenza unitaria avvolge una sola volta l'origine, quindi

$$\text{☼} = -i \frac{2i\pi}{(2N)!} \left. \frac{d^{2N}}{dz^{2N}} e^{z^2} \right|_{z=0} = \frac{2\pi}{(2N)!} \left. \frac{d^{2N}}{dz^{2N}} e^{z^2} \right|_{z=0} \,.$$

Per calcolare la derivata usiamo la serie di Taylor della funzione esponenziale con centro nell'origine. In generale si ha

$$e^{z^2} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left. \frac{d^j}{dz^j} e^{z^2} \right|_{z=0} z^j \,,$$

ma la serie è nota ed è

$$e^{z^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(z^2\right)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{k!} \,.$$

Confrontando le due serie si evince che le derivate dispari nell'origine sono nulle, mentre le pari valgono

$$\frac{1}{(2k)!}\,\frac{d^{2k}}{dz^{2k}}e^{z^2}\bigg|_{z=0}=\frac{1}{k!}\,,\qquad \forall\, k\in N\cup\{0\}\,,$$

da cui, posto $k=N$ si ottiene il valore dell'integrale, infatti

$$\text{☼}=\frac{2\pi}{(2N)!}\,\frac{d^{2k}}{dz^{2N}}e^{z^2}\bigg|_{z=0}=\frac{2\pi}{N!}\,.$$

SECONDO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Sapendo che la funzione $f(z)$ è intera, si dimostri l'identità

$$f\left(z+\frac{1}{z}\right)=C_0+\sum_{j=1}^{\infty}C_j\left(z^j+\frac{1}{z^j}\right),$$

$\forall\, z\neq 0$ e con

$$C_j=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(2\cos(\alpha)\right)\cos(j\alpha)d\alpha\,,\qquad \forall\, j\in\mathbb{N}\cup\{0\}\,.$$

SOLUZIONE DEL SECONDO PROBLEMA

Poiché la funzione $f(z)$ è intera, qualora non sia costante, ha una singolarità all'infinito. Ne consegue che la funzione $f\left(z+1/z\right)$, sempre nel caso in cui non sia costante, ha due singolarità della stessa natura all'infinito e nell'origine. Infatti, se la singolarità all'infinito della funzione $f(z)$ è un polo, si ha

$$\infty=\lim_{z\to\infty}f(z)=\lim_{z\to\infty}f\left(z+\frac{1}{z}\right)=\lim_{z\to 0}f\left(z+\frac{1}{z}\right),$$

cioè $f\left(z+1/z\right)$ ha lo stesso polo all'infinito e nell'origine. Invece, se la funzione $f(z)$ ha una singolarità essenziale all'infinto, avremo

$$\nexists\lim_{z\to\infty}f(z)\qquad\Rightarrow\qquad\begin{cases}\nexists\displaystyle\lim_{z\to\infty}f\left(z+\frac{1}{z}\right)\\[2ex] \nexists\displaystyle\lim_{z\to 0}f\left(z+\frac{1}{z}\right)\end{cases},$$

vale a dire che la funzione $f\left(z+1/z\right)$ avrà, anche in questo caso, la stessa singolarità sia all'infinito che nell'origine. Consideriamo lo sviluppo in serie di Laurent della funzione $f(z+1/z)$ centrata nell'origine, si ha

$$f\left(z+\frac{1}{z}\right)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}C_jz^j\,,$$

con i coefficienti di Laurent

$$C_j=\frac{1}{2i\pi}\oint_{\gamma}\frac{f\left(z+1/z\right)}{z^{j+1}}dz\,,\qquad \forall\, j\in\mathbb{Z}\,.$$

Il percorso d'integrazione γ è una curva chiusa che avvolge una sola volta l'origine, cioè è tale che $n(0,\gamma)=1$, scegliamo, senza perdita di generalità la circonferenza unitaria, ovvero

$$\gamma=\left\{z: z=e^{i\alpha}\,,\alpha\in[-\pi,\pi]\right\}\,.$$

L'integrale che definisce i coefficienti di Laurent diventa

$$C_j=\frac{1}{2i\pi}\oint_{\gamma}\frac{f\left(z+1/z\right)}{z^{j+1}}dz=\frac{1}{2i\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f\left(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}\right)}{e^{(j+1)i\alpha}}ie^{i\alpha}d\alpha\,,\qquad \forall\, j\in\mathbb{Z}\,,$$

usando la formula di Eulero per la funzione coseno,

$$C_j = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(2\cos(\alpha)\right) e^{-ij\alpha} d\alpha\,, \qquad \forall\, j \in \mathbb{Z}\,.$$

Facendo il cambiamento di variabile $\beta = -\alpha$,

$$C_j = -\frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{-\pi} f\left(2\cos(\beta)\right) e^{ij\beta} d\beta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(2\cos(\beta)\right) e^{ij\beta} d\beta\,, \qquad \forall\, j \in \mathbb{Z}\,,$$

ne consegue

$$\begin{aligned} C_j &= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{2}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f\left(2\cos(\alpha)\right) e^{-ij\alpha} d\alpha + \int_{-\pi}^{\pi} f\left(2\cos(\beta)\right) e^{ij\beta} d\beta\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(2\cos(\alpha)\right) \frac{e^{-ij\alpha}+e^{ij\alpha}}{2} d\alpha \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(2\cos(\alpha)\right) \cos(j\alpha)\, d\alpha\,, \qquad \forall\, j \in \mathbb{Z}\,. \end{aligned}$$

Grazie alla parità della funzione coseno, si ha per i coefficienti di Laurent la relazione

$$C_j = C_{-j}, \qquad \forall\, j \in \mathbb{N} \cup \{0\},.$$

La serie di Laurent può essere ridefinita come

$$f\left(z+\frac{1}{z}\right) = C_0 + \sum_{j=-\infty}^{-1} C_j z^j + \sum_{j=1}^{\infty} C_j z^j = C_0 + \sum_{j'=1}^{\infty} C_{-j'} z^{-j'} + \sum_{j=1}^{\infty} C_j z^j = C_0 + \sum_{j=1}^{\infty} C_j z^{-j} + \sum_{j=1}^{\infty} C_j z^j\,,$$

da cui l'espressione cercata

$$f\left(z+\frac{1}{z}\right) = C_0 + \sum_{j=1}^{\infty} C_j \left(z^j + \frac{1}{z^j}\right)\,,$$

avendo già ottenuto la forma richiesta dei coefficienti di Laurent.

Terzo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si ottenga il limite della successione

$$\left\{ \boxed{-\ +}_n = \int_0^{\infty} \frac{x^\beta}{x^n+1} dx \right\}_{n=1}^{\infty}\,.$$

con $\mathrm{Re}(\beta) \in (-1, 0)$.

Curiosità. Il simbolo $\boxed{-\ +}$ è quello della spia che nel cruscotto delle automobili si accende per indicare il malfunzionamento dell'alternatore.

Soluzione del terzo problema

Verifichiamo la convergenza degli integrali della successione, ovvero le condizioni sul parametro β agli estremi dell'intervallo d'integrazione,

$$\left|\frac{x^\beta}{x^n+1}\right| \left\{ \begin{array}{lll} \underset{x\to 0^+}{\sim} x^{\,\mathrm{Re}(\beta)} & \Rightarrow & \mathrm{Re}(\beta) > -1 \\ & & \\ \underset{x\to \infty}{\sim} x^{\,\mathrm{Re}(\beta)-n} & \Rightarrow & \mathrm{Re}(\beta) < -1+n \end{array} \right. , \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}\,,$$

la validità della seconda condizione per ogni $n \in \mathbb{N}$, implica $\mathrm{Re}(\beta) < 0$. Quindi, per valori del parametro β tali che $\mathrm{Re}(\beta) \in (-1, 0)$, tutti gli integrali sono convergenti. Possiamo calcolarli usando la formula per le funzioni polidrome

$$\int_0^{\infty} x^\alpha R(x) = -\frac{\pi e^{-i\pi\alpha}}{\mathrm{sen}(\pi\alpha)} \sum_{j=1}^{N} \mathrm{Res}\left[z^\alpha R(z), p_j\right]\,,$$

dove $R(z)$ è una funzione razionale che ha poli nei punti dell'insieme $\left\{p_j\right\}_{j=1}^{N}$, che ha intersezione vuota con il semiasse reale positivo.
Nel caso in esame, la funzione integranda dell'n-esimo integrale $\boxed{-\,+}_n$, con $n \in \mathbb{N}$, ha n poli semplici nelle n radici n-esime di -1, cioè nei punti

$$z_k = e^{(2k+1)i\pi/n}\,, \qquad k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}\,.$$

Ne consegue che l'n-esimo integrale vale

$$\boxed{-\,+}_n = -\frac{\pi e^{-i\pi\beta}}{\operatorname{sen}(\pi\beta)} \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{Res}\left[\frac{z^\beta}{z^n+1}, z_k\right].$$

Calcoliamo il residuo nel polo semplice $z_k = e^{(2k+1)i\pi/n}$, con $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$,

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left[\frac{z^\beta}{z^n+1}, z_k\right] &= \lim_{z\to z_k} \frac{z^\beta}{z^n+1}(z-z_k) = \lim_{z\to z_k} \frac{z^\beta}{nz^{n-1}} = \lim_{z\to z_k} \frac{z^{\beta+1}}{nz^n} = -\frac{z_k^{\beta+1}}{n} = -\frac{e^{(2k+1)i\pi(\beta+1)/n}}{n} \\ &= -\frac{e^{i\pi(\beta+1)/n}}{n}\left(e^{2i\pi(\beta+1)/n}\right)^k\,,\end{aligned}$$

dove si è considerata la fattorizzazione utile per ottenere un'espressione compatta della somma. Infatti,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{Res}\left[\frac{z^\beta}{z^n+1}, z_k\right] = -\frac{e^{i\pi(\beta+1)/n}}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{2i\pi(\beta+1)/n}\right)^k\,,$$

è la somma parziale $(n-1)$-esima della serie geometrica di ragione $e^{2i\pi(\beta+1)/n}$, moltiplichiamo numeratore e denominatore per $\left(e^{2i\pi(\beta+1)/n}-1\right)$ e otteniamo, $\forall\, n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{Res}\left[\frac{z^\beta}{z^n+1}, z_k\right] = -\frac{e^{i\pi(\beta+1)/n}}{n} \frac{e^{2i\pi(\beta+1)}-1}{e^{2i\pi(\beta+1)/n}-1} = -\frac{1}{n} \frac{e^{2i\pi\beta}-1}{e^{i\pi(\beta+1)/n}-e^{-i\pi(\beta+1)/n}} = -\frac{e^{i\pi\beta}\operatorname{sen}(\pi\beta)/n}{\operatorname{sen}(\pi(\beta+1)/n)}\,.$$

Usiamo questo risultato per calcolare l'n-esimo integrale

$$\boxed{-\,+}_n = -\frac{\pi e^{-i\pi\beta}}{\operatorname{sen}(\pi\beta)} \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{Res}\left[\frac{z^\beta}{z^n+1}, z_k\right] = -\frac{\pi e^{-i\pi\beta}}{\operatorname{sen}(\pi\beta)}\left(-\frac{e^{i\pi\beta}\operatorname{sen}(\pi\beta)/n}{\operatorname{sen}(\pi(\beta+1)/n)}\right) = \frac{\pi/n}{\operatorname{sen}((1+\beta)\pi/n)}\,,$$

quindi, il valore limite richiesto è

$$\lim_{n\to\infty} \boxed{-\,+}_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi/n}{\operatorname{sen}((1+\beta)\pi/n)} = \frac{1}{\beta+1}\,.$$

QUARTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 5/30)

Si dimostri che due proiettori non ortogonali definiti nello spazio di Hilbert separabile H, entrambi diversi dall'operatore identità, commutano se e solo se sono uguali.

SOLUZIONE DEL QUARTO PROBLEMA

Definiamo i due proiettori $\hat{A}$ e $\hat{B}$ in termini di due vettori unitari $|a\rangle$, $|b\rangle \in H$, tali che $\|a\| = \|b\| = 1$, condizione equivalente a $\langle a|a\rangle = \langle b|b\rangle = 1$, come

$$\hat{A} = |a\rangle\langle a|\,, \qquad \hat{B} = |b\rangle\langle b|\,.$$

Inoltre, la non ortogonalità implica $\langle a|b\rangle \neq 0$. La condizione sufficientemente, ovvero il fatto che coincidano implichi la commutazione è banale. Infatti, se $\hat{A} = \hat{B}$,

$$\left[\hat{A}, \hat{B}\right] = \left[\hat{A}, \hat{A}\right] = \left[\hat{B}, \hat{B}\right] = 0\,.$$

Supponiamo che il commutatore sia nullo e usiamo le definizioni dei proiettori in termini dei vettori, cioè

$$0 = \left[\hat{A}, \hat{B}\right] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = |a\rangle\langle a|b\rangle\langle b| - |b\rangle\langle b|a\rangle\langle a|\,,$$

facciamo agire il commutatore sul vettore $|a\rangle$

$$|0\rangle = |a\rangle \underbrace{\langle a|b\rangle\langle b|a\rangle}_{|\langle a|b\rangle|^2} - |b\rangle\langle b|a\rangle \underbrace{\langle a|a\rangle}_{1} = |a\rangle\,|\langle a|b\rangle|^2 - \underbrace{|b\rangle\langle b|a\rangle}_{\hat{B}|a\rangle}\,,$$

da cui

$$\hat{B}|a\rangle = |\langle a|b\rangle|^2\,|a\rangle \equiv \alpha|a\rangle\,.$$

È l'equazione agli autovalori per il proiettore $\hat{B}$, che ha autovettore $|a\rangle$ e autovalore $\alpha = |\langle a|b\rangle|^2$. Poiché i vettori non sono ortogonali e non sono nulli, si ha $\alpha > 0$, inoltre, dalla disuguaglianza di Schwarz segue

$$0 < \alpha = |\langle a|b\rangle|^2 \leq \|a\|^2\,\|b\|^2 = 1\,.$$

È noto che l'unico autovettore con autovalore non nullo del proiettore $\hat{B}$ è quello parallelo al vettore $|b\rangle$ e ha autovalore unitario, quindi si hanno le due condizioni

$$|a\rangle = \beta|b\rangle\,, \qquad \alpha = 1 \;\Rightarrow\; |\langle a|b\rangle| = 1\,.$$

I due vettori $|a\rangle$ e $|b\rangle$ sono unitari, quindi

$$1 = |\langle a|b\rangle| = |\beta||\langle b|b\rangle| = |\beta|\,,$$

β è una fase pura e il vettore $|a\rangle$ è pari, appunto, al vettore $|b\rangle$ moltiplicato per una fase pura. Ne consegue che per il proiettore si ha

$$\hat{A} = |a\rangle\langle a| = \beta|b\rangle\langle b|\beta^* = \underbrace{|\beta|^2}_{1}\underbrace{|b\rangle\langle b|}_{\hat{B}} = \hat{B}\,.$$

Abbiamo dimostrato che i due proiettori sono uguali.

Quinto problema (punteggio massimo: 6/30)

Dopo aver dimostrato che l'operatore $\hat{A}$ definito nello spazio di Hilbert E_3 a tre dimensioni e rappresentato dalla matrice

$$\hat{A} \overset{e}{\hookleftarrow} A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\,,$$

rispetto alla base canonica ortonormale $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^{3}$, non è diagonalizzabile, si ottenga la matrice che, rispetto alla stessa base, rappresenta l'operatore

$$\widehat{(\!(\,!\,)\!)} = \cosh\left(\hat{A}\right).$$

Curiosità. Il simbolo $(\!(\,!\,)\!)$ è quello della spia che nel cruscotto delle automobili si accende per indicare che il freno a mano è inserito o il malfunzionamento dell'impianto frenate.

Soluzione del quinto problema

Calcoliamo gli autovalori risolvendo l'equazione caratteristica

$$\det(A - I\alpha) = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1-\alpha & 2 & 0 \\ 0 & 1-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha \end{pmatrix} = 0$$

$$(1-\alpha)^3 = 0\,,$$

si ha il solo autovalore $\alpha = 1$ con molteplicità algebrica tre. Gli autovettori sono rappresentati rispetto alla base canonica $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^{3}$ da vettori le cui componenti contro-varianti sono le soluzioni dei sistemi omogenei

$$\begin{pmatrix} 1-\alpha & 2 & 0 \\ 0 & 1-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k^1 \\ a_k^2 \\ z_k^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k^1 \\ a_k^2 \\ a_k^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad k = 1, 2, 3\,,$$

dove a_k^j è la j-esima componente contro-variante del k-esimo autovettore, con $j, k \in \{1, 2, 3\}$. L'unica condizione che si ottiene dai tre sistemi è

$$a_1^2 = a_2^2 = a_3^2 = 0\,,$$

cioè i tre autovettori hanno la seconda componente nulla. Ne consegue che possiamo scegliere la terna di vettori

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Questi tre vettori non sono linearmente indipendenti poiché a_1 è il vettore nullo. In particolare, lo spazio che generano ha dimensione due ed è quindi pari a due la molteplicità geometrica dell'unico autovalore $\alpha = 1$, perciò l'operatore non è diagonalizzabile.
Per ottenere la funzione coseno iperbolico usiamo lo sviluppo in serie

$$\cosh(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^{2l}}{(2l)!}$$

e calcoliamo esplicitamente le potenze pari dell'operatore $\hat{A}$, ovvero della matrice A che lo rappresenta. A tal fine è utile usare la notazione a blocchi diagonale

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{con: } A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ne consegue che, $\forall\, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$A^{2l} = A = \begin{pmatrix} A_{11}^{2l} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il quadrato della blocco 2×2 A_{11} è

$$A_{11}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

la quarta potenza

$$A_{11}^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

la sesta

$$A_{11}^6 = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

quindi, la $2l$-esima, con $l \in \mathbb{N}$,

$$A_{11}^{2l} = \begin{pmatrix} 1 & 4l \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Allora, la potenza $2l$ della matrice A è

$$A^{2l} = \begin{pmatrix} A_{11}^{2l} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4l & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La funzione coseno iperbolico dell'operatore $\hat{A}$ è rappresentata dalla matrice

$$\begin{aligned} \hat{\textcircled{1}} = \cosh\left(\hat{A}\right) \overset{e}{\hookleftarrow} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{A^{2l}}{(2l)!} &= \begin{pmatrix} \sum_{l=0}^{\infty} 1/(2l)! & 2\sum_{l=0}^{\infty}(2l)/(2l)! & 0 \\ 0 & \sum_{l=0}^{\infty} 1/(2l)! & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{l=0}^{\infty} 1/(2l)! \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh(1) & 2\sum_{l=1}^{\infty} 1/(2l-1)! & 0 \\ 0 & \cosh(1) & 0 \\ 0 & 0 & \cosh(1) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e poiché

$$2\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(2l-1)!} = \left\{l' = l-1\right\} = 2\sum_{l'=0}^{\infty} \frac{1}{(2l'+1)!} = 2\,\mathrm{senh}(1)\,,$$

si ottiene la matrice richiesta come

$$\hat{\textcircled{1}} \overset{e}{\hookleftarrow} \textcircled{1} = \begin{pmatrix} \cosh(1) & 2\,\mathrm{senh}(1) & 0 \\ 0 & \cosh(1) & 0 \\ 0 & 0 & \cosh(1) \end{pmatrix}.$$

Sesto problema (punteggio massimo: 6/30)

Si calcoli la trasformata di Fourier della funzione $|x|$.

Soluzione del sesto Problema

Calcoliamo direttamente la trasformata di Fourier, si ha

$$\begin{aligned} \mathscr{F}_k\left[|x|\right] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |x| e^{-ikx} dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} w e^{-ikw} dw + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} x e^{-ikx} dx \\ &= \left\{x' = w\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{0} x' e^{ikx'} (-dx') + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} x e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} x' e^{ikx'} dx' + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} x e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} x' e^{ikx'} dx' + \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} x e^{ikx} dx\right)^{*} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \mathrm{Re}\left(\int_{0}^{\infty} x e^{ikx} dx\right). \end{aligned}$$

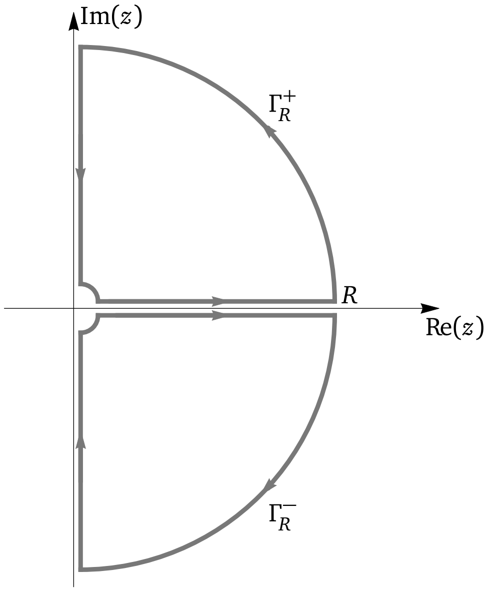
Integriamo due volte l'integrale rispetto alla variabile k, cosicché la trasformata di Fourier diventa

$$\mathscr{F}_k\left[|x|\right] = -\frac{d^2}{dk^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \mathrm{Re}\left(\int_{0}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{x} dx\right)$$

cosicché l'integrale tra parentesi tonde, inteso in valore principale, possa essere calcolato nel piano complesso. Definiamo i percorsi chiusi mostrai in figura

$$\begin{aligned} \Gamma_R^{+} &= [\epsilon, R] \cup \left\{z : z = Re^{i\theta}, \theta \in [0,\pi]\right\} \cup [iR, i\epsilon] \cup \left(-\left\{z : z = \epsilon e^{i\theta}, \theta \in [0,\pi]\right\}\right), \\ \Gamma_R^{-} &= [\epsilon, R] \cup \left(-\left\{z : z = Re^{i\theta}, \theta \in [-\pi, 0]\right\}\right) \cup [-iR, -i\epsilon] \cup \left\{z : z = \epsilon e^{i\theta}, \theta \in [-\pi, 0]\right\} \end{aligned}$$

e studiamo i due casi con $k > 0$ e $k < 0$.



Nel primo caso, $k > 0$, usando il teorema dei residui e considerando il limite di R divergente, abbiamo

$$0 = \lim_{R\to\infty} \oint_{\Gamma_R^+} \frac{e^{ikz}}{z} dz = \Pr\int_0^\infty \frac{e^{ikx}}{x} dx + \int_\infty^0 \frac{e^{kr}}{r} dr = \Pr\int_0^\infty \frac{e^{ikx}}{x} dx + J(k)\,,$$

dove si è definita la funzione

$$J(k) = \int_\infty^0 \frac{e^{kr}}{r} dr\,.$$

Il valore limite dell'integrale è nullo poiché la funzione integranda non ha singolarità avvolte dal percorso e quindi si applica il teorema di Cauchy ovvero quello dei residui. La derivata rispetto a k vale

$$\frac{dJ}{dk} = \int_\infty^0 e^{kr} dr = \frac{1}{k}\,,$$

da cui, integrando,

$$J(k) = \ln(k) + J_0\,,$$

J_0 è costante rispetto a k ed è arbitraria. L'integrale in valore principale cercato è

$$\Pr\int_0^\infty \frac{e^{ikx}}{x} dx = -J(k) = -\ln(k) - J_0\,.$$

Con esso si calcola la trasformata di Fourier nel caso $k > 0$, come

$$\mathscr{F}_k[|x|] = -\frac{d^2}{dk^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mathrm{Re}\left(\int_0^\infty \frac{e^{ikx}}{x} dx\right) = -\frac{d^2}{dk^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mathrm{Re}\left(-\ln(k) - J_0\right) = \frac{d^2}{dk^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mathrm{Re}\left(\ln(k) + J_0\right) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{k^2}\,.$$

Se, invece, $k < 0$, usiamo il limite dell'integrale sul percorso chiuso Γ_R^-

$$0 = \lim_{R\to\infty} \oint_{\Gamma_R^-} \frac{e^{ikz}}{z} dz = \Pr\int_0^\infty \frac{e^{ikx}}{x} dx + \int_{-\infty}^0 \frac{e^{kr}}{r} dr = \Pr\int_0^\infty \frac{e^{ikx}}{x} dx + H(k)\,,$$

dove

$$H(k) = \int_{-\infty}^0 \frac{e^{kr}}{r} dr\,.$$

Anche in questo caso, il valore del limite è zero come conseguenza del teorema di Cauchy, poiché il percorso chiuso non avvolge singolarità dell'integranda. Procediamo come già fatto, la derivata della funzione $H(k)$ vale

$$\frac{dH}{dk} = \int_{-\infty}^{0} e^{kr} dr = \frac{1}{k} .$$

Come prima, integrando si ottiene

$$H(k) = \ln(k) + H_0 ,$$

H_0, come J_0, è costante rispetto a k ed è arbitraria. L'integrale in valore principale nel caso $k < 0$ è

$$\Pr \int_{0}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{x} dx = -H(k) = -\ln(k) - H_0$$

e quindi per la trasformata di Fourier si ha

$$\mathscr{F}_k \left[|x| \right] = -\frac{d^2}{dk^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{Re} \left(\int_{0}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{x} dx \right) = -\frac{d^2}{dk^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{Re} \left(-\ln(k) - H_0 \right) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{k^2} .$$

L'unione dei due casi dà il risultato finale

$$\mathscr{F}_k \left[|x| \right] = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{k^2} .$$