

METODI MATEMATICI PER LA FISICA

TERZO APPELLO ESTIVO - 28 LUGLIO 2026

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che il punteggio assegnato a ciascuna procedura di risoluzione può variare tra lo zero e il massimo indicato ed è stabilito valutando:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo;
6. la bellezza e l'armonia del tutto.

PRIMO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$\int_{|z-1-i|=1} \frac{dz}{e^{\sinh(z)} + 1}.$$

Curiosità. In ogni ambito dell'attività umana ci sono delle realizzazioni che, seppur concepite con il fine proprio dell'ambito di appartenenza, hanno caratteristiche tali da renderle punti di svolta per l'evoluzione e lo sviluppo dei concetti, delle tecniche e delle tecnologie basilari per quel ambito culturale. L'architettura rappresenta tutte le attività, da quelle concettuali a quelle pratiche, che hanno lo scopo di costruire strutture, ricavare ambienti, adattare luoghi di varia natura alle esigenze umane di fruizione spaziale, di godimento intellettuale e culturale. L'architettura è arte, cultura e storia, infatti, gli eventi storici più significativi sono spesso testimoniati da edifici o monumenti. L'architettura contemporanea, grazie alla disponibilità di nuove tecnologie che hanno innovato, tanto i materiali quanto le tecniche costruttive, ha visto la realizzazione di progetti, spesso concepiti da architetti visionari, che hanno segnato l'urbanistica moderna rivoluzionandone i canoni per proiettarla nell'avvenire.

La testata giornalistica virtuale e indipendente “**thebrief**” (<https://www.thebrief.city>) ha selezionato dieci esempi di architetture contemporanee che rientrano nel novero dei progetti innovativi. La lista e le immagini delle opere sono riportate qui sotto.

1. La casa sulla cascata di **Frank Lloyd Wright**, Mill Run, Stati Uniti.
2. La sede della *California Academy of Science* di **Renzo Piano**, San Francisco, Stati Uniti.
3. L'edificio del *Heydar Center* dello studio **Zaha Hadid Architects**, Baku, Azerbaijan.
4. La sede del *Garage Museum of Contemporary Art* di **Remment Lucas Koolhaas**, Mosca, Russia.
5. La sede del *Tate Modern* dello studio **Herzog & De Meuron**, Londra, Regno Unito,.
6. Il grattacielo *Mirador* del gruppo di progettazione **MVRDV** e **Blanca Lleó Fernández**, Madrid, Spagna.
7. Il grattacielo *Seagram* di **Ludwig Mies van der Rohe** e **Philip Johnson**, New York, Stati Uniti.
8. L'*Opera House* di **Jørn Oberg Utzon**, Sydney, Australia.
9. Il *Centre Pompidou* di **Renzo Piano**, Parigi, Francia.
10. La struttura del *Guggenheim Museum* di **Frank Owen Gehry**, Bilbao, Spagna.



Il simbolo , che indica l'integrale del primo problema, rappresenta la Casa sulla cascata di Frank Lloyd Wright.

SOLUZIONE DEL PRIMO PROBLEMA

La funzione integranda è meromorfa, ha poli in corrispondenza degli zeri della funzione a denominatore $e^{\sinh(z)} + 1$, che si hanno per valori di z , tali che $e^{\sinh(z)} = -1$. Considerando le determinazioni di -1 , si hanno

$$e^{\sinh(z_k)} = e^{(2k+1)i\pi} \quad \Rightarrow \quad \sinh(z_k) = (2k+1)i\pi, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Usiamo la formula di Eulero per la funzione seno iperbolico, così da ottenere un'equazione per i valori dei poli z_k , si ha

$$e^{2z_k} - 2i\pi(2k+1)e^{z_k} - 1 = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

quindi, tenendo conto della negatività del discriminante,

$$e^{z_k^\pm} = i\pi(2k+1) \pm \sqrt{-\pi^2(2k+1)^2 - 1} = i\left(\pi(2k+1) \pm \sqrt{\pi^2(2k+1)^2 - 1}\right), \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Gli esponenziali dei poli sono degli immaginari puri, estraendo il logaritmo naturale,

$$z_k^\pm = \frac{i\pi}{2} + \ln\left(\pi(2k+1) \pm \sqrt{\pi^2(2k+1)^2 - 1}\right), \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Le soluzioni dell'insieme $\{z_k^-\}_{k \in \mathbb{Z}}$ possono essere riscritte razionalizzando l'argomento della funzione logaritmo naturale, come

$$\begin{aligned} z_k^- &= \frac{i\pi}{2} + \ln\left(\pi(2k+1) - \sqrt{\pi^2(2k+1)^2 - 1}\right) = \frac{i\pi}{2} + \ln\left(\frac{\pi^2(2k+1)^2 - \pi^2(2k+1)^2 + 1}{\pi(2k+1) + \sqrt{\pi^2(2k+1)^2 - 1}}\right) \\ &= \frac{i\pi}{2} + \ln\left(\frac{1}{\pi(2k+1) + \sqrt{\pi^2(2k+1)^2 - 1}}\right) = \frac{i\pi}{2} - \ln\left(\pi(2k+1) + \sqrt{\pi^2(2k+1)^2 - 1}\right), \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

da cui

$$z_k^\pm = \frac{i\pi}{2} \pm \ln\left(\pi(2k+1) + \sqrt{\pi^2(2k+1)^2 - 1}\right), \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Studiamo le distanze di questi poli dal centro della circonferenza di raggio unitario che rappresenta il percorso d'integrazione, cioè $C = \{z : z = 1 + i + e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi]\}$. Consideriamo i valori non negativi di $k \in \mathbb{Z}$, cioè: $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, in questi casi l'argomento della funzione logaritmo naturale è strettamente positivo, quindi il valore del logaritmo è reale e si ha

$$\begin{aligned} |z_k^\pm - 1 - i|^2 &= \left| \frac{i\pi}{2} \pm \ln\left(\pi(2k+1) + \sqrt{\pi^2(2k+1)^2 - 1}\right) - 1 - i \right|^2 \\ &= \underbrace{\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)^2}_{\simeq 0,326} + \underbrace{\left(-1 \pm \ln\left(\pi(2k+1) + \sqrt{\pi^2(2k+1)^2 - 1}\right)\right)^2}_{\begin{aligned} &\simeq 0,659_{k=0}^-, 3,739_{k=1}^-, 5,984_{k=2}^- \dots \\ &\simeq 7,905_{k=0}^+, 15,474_{k=1}^+, 19,770_{k=2}^+ \dots \end{aligned}} \\ &= \begin{cases} 0,984_{k=0}^-, 4,065_{k=1}^-, 6,310_{k=2}^- \dots \\ 8,230_{k=0}^+, 15,800_{k=1}^+, 20,095_{k=2}^+ \dots \end{cases}, \end{aligned}$$

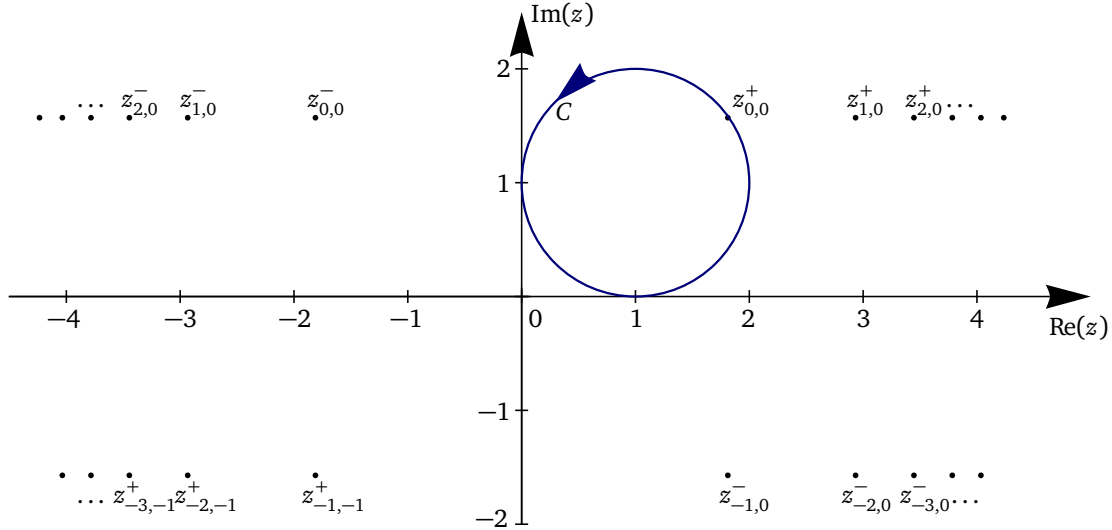
dove i valori di k e del segno sono indicati rispettivamente a pedice e ad apice del numero approssimato ottenuto. Si evince che nel caso considerato, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, solo il polo z_0^- è avvolto dalla circonferenza C . Per valori negativi di k , cioè, $\forall k$, tale che: $-k \in \mathbb{N}$, si ha che l'argomento della funzione logaritmo naturale è strettamente negativo, quindi

$$\begin{aligned} |z_k^\pm - 1 - i|^2 &= \left(\pi\left(\frac{1}{2} \pm 1\right) - 1\right)^2 + \left(-1 \pm \ln\left|\pi(2k+1) + \sqrt{\pi^2(2k+1)^2 - 1}\right|\right)^2 \\ &= \begin{cases} 7,268_{k=-1}^-, 10,348_{k=-2}^-, 12,593_{k=-3}^- \dots \\ 21,687_{k=-1}^+, 29,256_{k=-2}^+, 33,551_{k=-3}^+ \dots \end{cases}, \end{aligned}$$

nessuno dei poli con indice k strettamente negativo è avvolto dalla circonferenza C .

Più in dettaglio, i poli con indice k maggiore o uguale a zero hanno parte immaginaria costante e parte reale che cresce logicamente, i primi sono

$$\operatorname{Im}(z_{k \geq 0}^{\pm}) = \frac{\pi}{2} \simeq 1,571, \quad \begin{aligned} \operatorname{Re}(z_0^{\pm}) &= \pm \ln(\pi + \sqrt{\pi^2 - 1}) \simeq \pm 1,812 \\ \operatorname{Re}(z_1^{\pm}) &= \pm \ln(3\pi + \sqrt{9\pi^2 - 1}) \simeq \pm 2,934 \\ \operatorname{Re}(z_2^{\pm}) &= \pm \ln(5\pi + \sqrt{25\pi^2 - 1}) \simeq \pm 3,446 \end{aligned}$$



Per i poli con indici negativi si ha

$$\operatorname{Im}(z_{k < 0}^{\pm}) = \pi \frac{1 \pm 2}{2} \simeq 4,712^+, -1,571^-, \quad \begin{aligned} \operatorname{Re}(z_{-1}^{\pm}) &= \pm \ln(\pi - \sqrt{\pi^2 - 1}) \simeq \mp 1,812 \\ \operatorname{Re}(z_{-2}^{\pm}) &= \pm \ln(3\pi - \sqrt{9\pi^2 - 1}) \simeq \mp 2,934 \\ \operatorname{Re}(z_{-3}^{\pm}) &= \pm \ln(5\pi - \sqrt{25\pi^2 - 1}) \simeq \mp 3,446 \end{aligned}$$

Infine, è da considerare la periodicità della funzione seno iperbolico. Poiché, $\sinh(z) = \sinh(z + 2im\pi)$, per ogni $m \in \mathbb{Z}$, l'insieme dei poli è

$$\{z_{k,m}^-, z_{k,m}^+\}_{k,m \in \mathbb{Z}},$$

dove

$$z_{k,m}^{\pm} = z_k^{\pm} + 2im\pi,$$

quindi

$$\operatorname{Re}(z_{k,m}^{\pm}) = \operatorname{Re}(z_k^{\pm}), \quad \operatorname{Im}(z_{k,m}^{\pm}) = \operatorname{Im}(z_k^{\pm}) + 2m\pi, \quad \forall k, m \in \mathbb{Z}.$$

In figura, i dischi neri indicano i poli, la circonferenza C è rappresentata in blu scuro. È immediato osservare che

$$\left| \operatorname{Im}(z_{k,m}^{\pm}) \right| \geq \frac{\pi}{2}, \quad \forall k, m \in \mathbb{Z},$$

che, unitamente all'indipendenza delle parti reali dall'indice m , non modifica la conclusione per cui l'unico polo avvolto dalla circonferenza C è

$$z_{0,0}^+ = \ln(\pi + \sqrt{\pi^2 - 1}) + i\frac{\pi}{2} \simeq 1,812 + 1,571i,$$

che infatti si trova nel primo quadrante.

L'integrale richiesto si calcola usando il teorema dei residui

$$\oint_C \frac{1}{e^{\sinh(z)} + 1} dz = 2i\pi \operatorname{Res}\left[\frac{1}{e^{\sinh(z)} + 1}, z_{0,0}^+\right] = 2i\pi \lim_{z \rightarrow z_{0,0}^+} \frac{z - z_{0,0}^+}{e^{\sinh(z)} + 1} = \frac{2i\pi}{\cosh(z_{0,0}^+) e^{\sinh(z_{0,0}^+)}}.$$

il valore dell'esponenziale del seno iperbolico è $e^{\text{senh}(z_{0,0}^+)} = -1$, mentre quello del coseno iperbolico, ricordando che: $z_{0,0}^+ = \ln(\pi + \sqrt{\pi^2 - 1}) + i\pi/2$, è

$$\cosh(z_{0,0}^+) = \frac{e^{z_{0,0}^+} + e^{-z_{0,0}^+}}{2} = \frac{e^{i\pi/2}}{2} \left(\pi + \sqrt{\pi^2 - 1} - \frac{1}{\pi + \sqrt{\pi^2 - 1}} \right) = i \frac{\pi^2 + \pi\sqrt{\pi^2 - 1} - 1}{\pi + \sqrt{\pi^2 - 1}},$$

da cui il risultato finale

$$\text{Pr} = -2\pi \frac{\pi + \sqrt{\pi^2 - 1}}{\pi^2 + \pi\sqrt{\pi^2 - 1} - 1}.$$

SECONDO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si calcoli l'integrale in valore principale

$$\text{Pr} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dq}{\cos(q) + \tan(q)}.$$

Curiosità. Il simbolo , che indica l'integrale, rappresenta l'edificio del *Guggenheim Museum*.

SOLUZIONE DEL SECONDO PROBLEMA

Riscriviamo l'integranda esprimendo la funzione tangente in termini delle funzioni seno e coseno,

$$\text{Pr} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos(q)}{\cos^2(q) + \tan(q)} dq = \text{Pr} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos(q)}{1 - \sin^2(q) + \sin(q)} dq,$$

facciamo la sostituzione $w = \sin(q)$, da cui si ha il differenziale: $dw = \cos(q) dq$ e l'intervallo di integrazione $[-1, 1]$, quindi

$$\text{Pr} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos(q)}{\cos^2(q) + \tan(q)} dq = -\text{Pr} \int_{-1}^1 \frac{dw}{w^2 - w - 1}.$$

I due poli semplici della funzione integranda, nella variabile w , sono

$$w_{1,2} = \frac{1 \mp \sqrt{5}}{2}.$$

Il valore principale va calcolato solo rispetto al primo polo che vale $w_1 \simeq -0,618$ e appartiene all'intervallo d'integrazione, mentre il secondo: $w_2 \simeq 1,618$, non vi appartiene. Scomponiamo la funzione integranda à la Mittag-Leffler come

$$\text{Pr} \int_{-1}^1 \frac{dw}{w^2 - w - 1} = -\frac{1}{w_1 - w_2} \left(\text{Pr} \int_{-1}^1 \frac{dw}{w - w_1} - \int_{-1}^1 \frac{dw}{w - w_2} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\text{Pr} \int_{-1}^1 \frac{dw}{w - w_1} - \int_{-1}^1 \frac{dw}{w - w_2} \right),$$

con il valore principale solo nel primo integrale. Possiamo integrare direttamente,

$$\begin{aligned} \text{Pr} \int_{-1}^1 \frac{dw}{w - w_1} &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\text{Pr} \int_{-1}^1 \frac{dw}{w - w_1} - \int_{-1}^1 \frac{dw}{w - w_2} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{-1}^{w_1 - \epsilon} \frac{dw}{w - w_1} + \int_{w_1 + \epsilon}^1 \frac{dw}{w - w_1} \right) - \int_{-1}^1 \frac{dw}{w - w_2} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\ln(w - w_1) \Big|_{-1}^{w_1 - \epsilon} + \ln(w - w_1) \Big|_{w_1 + \epsilon}^1 \right) - \ln(w - w_2) \Big|_{-1}^1 \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\ln(-1) - \ln \left(\frac{w - w_2}{w - w_1} \right) \Big|_{-1}^1 \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\ln(-1) + \ln \left(\frac{w - w_1}{w - w_2} \right) \Big|_{-1}^1 \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\ln(-1) + \ln \left(\frac{1 - w_1 - 1 - w_2}{1 - w_2 - 1 - w_1} \right) \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\ln(-1) + \ln \left(\frac{1 - w_1}{1 - w_2} \frac{1 + w_2}{1 + w_1} \right) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\ln(-1) + \ln \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{1 - \sqrt{5}} \frac{3 + \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}} \right) \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \left(\frac{4\sqrt{5} + 8}{4\sqrt{5} - 8} \right), \end{aligned}$$

da cui, razionalizzando l'argomento della funzione logaritmo naturale, si ha il risultato finale

$$\text{🏙️} = \frac{2}{\sqrt{5}} \ln(2 + \sqrt{5}).$$

TERZO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si dimostri che la funzione

$$\text{🏙️}(z) = \cos(z) + 3z^2,$$

ha due zeri nel disco unitario $D_1 = \{z : |z| < 1\}$.

Curiosità. Il simbolo 🏙️, che indica la funzione, rappresenta il grattacielo *Mirador*.

SOLUZIONE DEL TERZO PROBLEMA

La funzione 🏙️(z) è intera e non ha zeri reali. Questa conclusione può essere tratta rappresentando graficamente la funzione coseno $g(x) = \cos(x)$ e il polinomio di secondo grado $-f(x) = -3x^2$, la cui differenza dà la funzione del problema, e verificando che le due funzioni non si intersecano.

Usiamo il teorema di Rouché, considerando le due funzioni $g(z) = \cos(z)$ e $f(z) = 3z^2$, e il dominio semplicemente connesso D_1 , cioè il disco unitario. Dobbiamo dimostrare che

$$|f(z)| > |g(z)|, \quad \forall z \in \partial D_1 = \{z : |z| = 1\},$$

ovvero che il modulo del polinomio è strettamente maggiore di quello della funzione coseno sulla frontiera del disco unitario, cioè sulla circonferenza unitaria. Il primo modulo è costante e uguale a 3, infatti, $\forall z \in \partial D_1$,

$$|f(z)| = |3z^2| = 3|z|^2 = 3.$$

Per il modulo della funzione coseno, consideriamo la parametrizzazione della circonferenza unitaria $z = e^{it}$, con $t \in [0, 2\pi]$, si ha

$$\begin{aligned} \cos(z) &= \cos(e^{it}) = \cos(\cos(t) + i \sin(t)) = \cos(\cos(t)) \cos(i \sin(t)) - \sin(\cos(t)) \sin(i \sin(t)) \\ &= \cos(\cos(t)) \cosh(\sin(t)) - i \sin(\cos(t)) \sinh(\sin(t)). \end{aligned}$$

Poiché le funzioni seno e cose $\cos(t)$ e $\sin(t)$ assumono valori reali per $t \in [0, 2\pi]$, Il modulo quadro è

$$\begin{aligned} |\cos(z)|^2 &= \cos^2(\cos(t)) \cosh^2(\sin(t)) + \sin^2(\cos(t)) \sinh^2(\sin(t)) \\ &= \cos^2(\cos(t)) \cosh^2(\sin(t)) + (1 - \cos^2(\cos(t))) \sinh^2(\sin(t)) \\ &= \cos^2(\cos(t)) (\cosh^2(\sin(t)) - \sinh^2(\sin(t))) + \sinh^2(\sin(t)) \\ &= \cos^2(\cos(t)) + \sinh^2(\sin(t)). \end{aligned}$$

Il modulo quadro della funzione coseno sulla circonferenza unitaria è una funzione continua della variabile reale t ed è periodica con periodo 2π . Ne studiamo il comportamento, cercando massimi e minimi locali. La deriva prima è

$$\frac{d}{dt} |\cos(z)|^2 = 2 \sin(\cos(t)) \cos(\cos(t)) \sin(t) + 2 \cosh(\sin(t)) \sinh(\sin(t)) \cos(t),$$

si hanno zeri per: $t = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi$, ovvero in corrispondenza degli zeri delle funzioni $\sin(t)$ e $\cos(t)$, per $t \in [0, 2\pi]$.

La derivata seconda

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} |\cos(z)|^2 &= -2 \cos^2(\cos(t)) \sin^2(t) + 2 \sin^2(\cos(t)) \sin^2(t) + 2 \sin(\cos(t)) \cos(\cos(t)) \cos(t) \\ &\quad + 2 \sinh^2(\sin(t)) \cos^2(t) + 2 \cosh^2(\sin(t)) \cos^2(t) - 2 \cosh(\sin(t)) \sinh(\sin(t)) \sin(t), \\ &= -2 \cos(2 \cos(t)) \sin^2(t) + \sin(2 \cos(t)) \cos(t) + 2 \cosh(2 \sin(t)) \cos^2(t) - \sinh(2 \sin(t)) \sin(t), \end{aligned}$$

Valutandola nei punti in cui si annulla la derivata prima si hanno

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} |\cos(z)| \right|_{t=0, \pi, 2\pi} = 2 + \sin(2) > 0, \quad \left. \frac{d^2}{dt^2} |\cos(z)| \right|_{t=\pi/2, 3\pi/2} = -2 - \sinh(2) < 0.$$

Nei punti $t = 0, \pi, 2\pi$ si hanno minimi locali e nei punti $t = \pi/2, 3\pi/2$ massimi locali. Poiché gli estremi dell'intervallo $[0, 2\pi]$ sono punti di minimo, questi ultimi e i massimi sono assoluti. I valori massimi del modulo sono uguali e valgono:

$$\begin{aligned} |\cos(z)|_{t=\pi/2} &= |\cos(e^{i\pi/2})| = |\cos(i)| = |\cosh(1)| = \cosh(1) \simeq 1,543, \\ |\cos(z)|_{t=3\pi/2} &= |\cos(e^{3i\pi/2})| = |\cos(-i)| = |\cos(i)| = |\cosh(1)| = \cosh(1) \simeq 1,543. \end{aligned}$$

Sulla circonferenza unitaria si ha

$$|g(z)| = |\cos(z)| \leq \cosh(1) < 3 = |f(z)|, \quad \forall z : |z| = 1,$$

vale, quindi, la condizione del teorema di Rouché.

Ne consegue che la funzione del problema  (z) ha nel disco unitario lo stesso numero di zeri della funzione $f(z) = 3z^2$, che è un polinomio di secondo grado avente uno zero doppio nell'origine, ovvero nel disco unitario. Uno zero doppio, per definizione, ha molteplicità due, quindi la funzione completa  (z) ha due zeri nel disco unitario. Abbiamo dimostrato quanto richiesto dal progetto.

QUARTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si ottenga la matrice che, rispetto alla base ortonormale $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^5$ rappresenta l'operatore , definito nello spazio di Hilbert a cinque dimensioni W_5 , tale che, per ogni vettore $|x\rangle \in W_5$, con

$$\left(\sum_{k=1}^5 \langle e_k | \right) |x\rangle \neq 0,$$

si abbia

$$\widehat{\text{CAS}} |x\rangle = \alpha_x \sum_{k=1}^5 |e_k\rangle,$$

dove $\alpha_x \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ è uno scalare opportuno dipendente dal vettore $|x\rangle$.

Curiosità Il simbolo  che indica l'operatore è quello ufficiale della *California Academy of Science*.

SOLUZIONE DEL QUARTO PROBLEMA

L'operatore  si comporta come un proiettore nella direzione del vettore $\sum_{k=1}^5 |e_k\rangle \in W_5$. Poiché non si hanno condizioni sul parametro α_x , l'operatore è proporzionale al proiettore

$$\hat{P} = |v\rangle\langle v|,$$

dove il vettore $|v\rangle$ di norma unitaria è

$$|v\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=1}^5 |e_k\rangle,$$

dove $\sqrt{5}$ è la norma del vettore $\sum_{k=1}^5 |e_k\rangle$. Infatti, per l'ortonormalità dei vettori della base, si ha

$$\left\| \sum_{k=1}^5 |e_k\rangle \right\| = \sqrt{\sum_{k,j=1}^5 \langle e_j | e_k \rangle} = \sqrt{\sum_{k,j=1}^5 \delta_k^j} = \sqrt{\sum_{k=1}^5 1} = \sqrt{5}.$$

Le equazioni agli autovalori dell'operatore $\widehat{\odot}$ sono

$$\widehat{\odot}|b_k\rangle = \beta_k|b_k\rangle, \quad k \in \{1, 2, 3, 4, 5\},$$

gli insiemi $\{|b_k\rangle\}_{k=1}^5$ e $\{\beta_k\}_{k=1}^5$ sono rispettivamente quelli degli autovettori e degli autovalori corrispondenti. Essendo proporzionale al proiettore $\hat{P}$, possiamo definire l'operatore $\widehat{\odot}$ come

$$\widehat{\odot} = \rho \hat{P},$$

con $\rho \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, ne consegue che ha gli stessi autovettori del proiettore e come autovalori quelli del proiettore moltiplicati per la costante ρ . In uno spazio di Hilbert a N dimensioni, gli autovettori di un proiettore sono il vettore che ne definisce la 'direzione' di proiezione, che ha autovalore unitario, e l'insieme degli $N - 1$ vettori ad esso ortogonali che hanno lo zero come autovalore comune, che, nei casi con $N > 2$, è degenerare con ordine di degenerazione $N - 1 > 1$.

Nel caso del problema, si ha $N = 5 > 2$, l'autovettore con autovalore non nullo è $|v\rangle$ e si ha

$$\widehat{\odot}|v\rangle = \rho \hat{P}|v\rangle = \rho|v\rangle,$$

quindi ha autovalore $\rho \neq 0$. Per altri quattro autovettori scegliamo un coppia di vettori mutuamente ortogonali ed entrambi ortogonali al vettore $|v\rangle$. Li chiamiamo e definiamo come: $|v_1\rangle = |v\rangle$ e

$$|v_2\rangle = \frac{|e_1\rangle - |e_2\rangle}{\sqrt{2}}, \quad |v_3\rangle = \frac{|e_4\rangle - |e_5\rangle}{\sqrt{2}}, \quad |v_4\rangle = \frac{|e_1\rangle + |e_2\rangle + |e_4\rangle + |e_5\rangle}{2}, \quad |v_5\rangle = \frac{|e_1\rangle + |e_2\rangle - 4|e_3\rangle + |e_4\rangle + |e_5\rangle}{2\sqrt{5}}.$$

La rappresentazione diagonale dell'operatore $\widehat{\odot}$, fatta rispetto alla base ortonormale dei suoi autovettori è

$$\widehat{\odot} \xleftrightarrow{v} \odot_d = \text{diag}(\rho, 0, 0, 0, 0).$$

La matrice diagonalizzante è

$$U = \begin{pmatrix} v_1^1 & v_2^1 & v_3^1 & v_4^1 & v_5^1 \\ v_1^2 & v_2^2 & v_3^2 & v_4^2 & v_5^2 \\ v_1^3 & v_2^3 & v_3^3 & v_4^3 & v_5^3 \\ v_1^4 & v_2^4 & v_3^4 & v_4^4 & v_5^4 \\ v_1^5 & v_2^5 & v_3^5 & v_4^5 & v_5^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/2 & 1/(2\sqrt{5}) \\ 1/\sqrt{5} & -1/\sqrt{2} & 0 & 1/2 & 1/(2\sqrt{5}) \\ 1/\sqrt{5} & 0 & 0 & 0 & -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{2} & -1/2 & 1/(2\sqrt{5}) \\ 1/\sqrt{5} & 0 & -1/\sqrt{2} & -1/2 & 1/(2\sqrt{5}) \end{pmatrix},$$

è unitaria essendo composta dalle componenti di vettori ortonormali. Si hanno le relazioni

$$\odot_d = U^\dagger \widehat{\odot} U \quad \Rightarrow \quad \widehat{\odot} = U \odot_d U^\dagger,$$

la seconda è la matrice cercata. La calcoliamo

$$\begin{aligned} \widehat{\odot} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1/2 & 1/2 & 0 & -1/2 & -1/2 \\ \frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{2\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{2\sqrt{5}} \end{pmatrix} \\ &= \rho \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

da cui l'espressione della matrice richiesta dal problema

$$\widehat{\odot} = \frac{\rho}{5} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

QUINTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Sia $|a\rangle$ autovettore con autovalore α non nullo dell'operatore $\hat{\mathbb{I}}$, definito nello spazio di Hilbert E_N , con dimensione $N > 2$. Il proiettore $\hat{Q}$, definito nello stesso spazio vettoriale, commuta con l'operatore $\hat{\mathbb{I}}$ ed è tale che

$$\hat{Q}|a\rangle = |a_Q\rangle \neq |0\rangle, |a\rangle.$$

Ovvero, il vettore $|a\rangle$ non è né ortogonale né parallelo alla direzione di proiezione di $\hat{Q}$. Avvalendosi di queste informazioni, si dimostri che l'autovalore α è degenere e cioè che la sua molteplicità algebrica è strettamente maggiore di uno.

Curiosità. L'immagine $\hat{\mathbb{I}}$, che indica l'operatore, è il simbolo del grattacielo *Seagram*.

SOLUZIONE DEL QUINTO PROBLEMA

Indichiamo con $|a_\perp\rangle$ la componente di $|a\rangle$ perpendicolare alla componente $|a_Q\rangle$, nella direzione di proiezione di $\hat{Q}$, cioè

$$|a_\perp\rangle = |a\rangle - |a_Q\rangle.$$

Segue che l'azione del proiettore su $|a_\perp\rangle$ dà il vettore nullo, infatti

$$\hat{Q}|a_\perp\rangle = \hat{Q}(|a\rangle - |a_Q\rangle) = \underbrace{\hat{Q}|a\rangle}_{=|a_Q\rangle} - \underbrace{\hat{Q}|a_Q\rangle}_{=|a_Q\rangle} = |0\rangle.$$

Possiamo scrivere il vettore $|a\rangle$ come somma delle due componenti perpendicolari,

$$|a\rangle = |a_Q\rangle + |a_\perp\rangle.$$

Consideriamo l'azione del commutatore $[\hat{\mathbb{I}}, \hat{Q}]$, che è nullo, sull'autovettore $|a\rangle$, si ha

$$|0\rangle = [\hat{\mathbb{I}}, \hat{Q}]|a\rangle = \underbrace{\hat{\mathbb{I}}\hat{Q}|a\rangle}_{=|a_Q\rangle} - \underbrace{\hat{Q}\hat{\mathbb{I}}|a\rangle}_{\alpha|a\rangle} = \hat{\mathbb{I}}|a_Q\rangle - \alpha \underbrace{\hat{Q}|a\rangle}_{|a_Q\rangle} = \hat{\mathbb{I}}|a_Q\rangle - \alpha|a_Q\rangle,$$

segue che

$$\hat{\mathbb{I}}|a_Q\rangle = \alpha|a_Q\rangle.$$

Anche il vettore $|a_Q\rangle$ è autovettore dell'operatore $\hat{\mathbb{I}}$ con lo stesso autovalore α dell'autovettore $|a\rangle$. Usando la scomposizione $|a\rangle = |a_Q\rangle + |a_\perp\rangle$ e l'equazione agli autovalori, si ha

$$\alpha|a\rangle = \alpha|a_Q\rangle + \alpha|a_\perp\rangle = \hat{\mathbb{I}}|a\rangle = \hat{\mathbb{I}}(|a_Q\rangle + |a_\perp\rangle) = \underbrace{\hat{\mathbb{I}}|a_Q\rangle}_{=\alpha|a_Q\rangle} + \hat{\mathbb{I}}|a_\perp\rangle = \alpha|a_Q\rangle + \hat{\mathbb{I}}|a_\perp\rangle,$$

dell'identità tra il secondo e l'ultimo membro si ottiene l'equazione agli autovalori

$$\hat{\mathbb{I}}|a_\perp\rangle = \alpha|a_\perp\rangle.$$

Anche il vettore $|a_\perp\rangle$ è autovettore rispetto allo stesso autovalore degli autovettori $|a\rangle$ e $|a_Q\rangle$. In particolare, gli autovettori $|a_Q\rangle$ e $|a_\perp\rangle$, sono ortogonali, quindi linearmente indipendenti, e generano un sotto-spazio bidimensionale E_2

di E_N , $E_2 \subset E_N$ i cui vettori sono autovettori relativi allo stesso autovalore α . Ciò implica che la molteplicità geometrica $m_g(\alpha)$ dell'autovalore α è maggiore o uguale a due. La sua molteplicità algebrica, $m_a(\alpha)$, quindi, verificando le disuguaglianze: $1 \leq m_g(\alpha) \leq m_a(\alpha) \leq N$, sarà tale che

$$m_a(\alpha) \geq m_g(\alpha) \geq 2.$$

Abbiamo dimostrato quanto richiesto dal problema, cioè: $m_a(\alpha) > 1$.

SESTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 5/30)

Si ottenga la funzione che ha la trasformata di Fourier della reciproca uguale al reciproco della trasformata di Fourier. Cioè, detta $\blacktriangleleft\blacktriangleright(x)$ tale funzione, si deve avere

$$\mathcal{F}_k \left[\frac{1}{\blacktriangleleft\blacktriangleright} \right] = \mathcal{F}_k \left[\blacktriangleleft\blacktriangleright^{-1} \right] = \frac{1}{\mathcal{F}_k [\blacktriangleleft\blacktriangleright]} = \mathcal{F}_k [\blacktriangleleft\blacktriangleright]^{-1}.$$

Curiosità. L'immagine $\blacktriangleleft\blacktriangleright$, che rappresenta la funzione cercata, è il simbolo dell'Opera House.

SOLUZIONE DEL SESTO PROBLEMA

Possiamo usare il teorema della convoluzione per la funzione $\blacktriangleleft\blacktriangleright(x)$, da determinare, e la sua reciproca $\blacktriangleleft\blacktriangleright(x)^{-1}$, si ha

$$\mathcal{F}_k [\blacktriangleleft\blacktriangleright * \blacktriangleleft\blacktriangleright^{-1}] = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}_k [\blacktriangleleft\blacktriangleright] \mathcal{F}_k [\blacktriangleleft\blacktriangleright^{-1}],$$

da cui

$$\mathcal{F}_k [\blacktriangleleft\blacktriangleright^{-1}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\mathcal{F}_k [\blacktriangleleft\blacktriangleright * \blacktriangleleft\blacktriangleright^{-1}]}{\mathcal{F}_k [\blacktriangleleft\blacktriangleright]} = \frac{\mathcal{F}_k [\blacktriangleleft\blacktriangleright * \blacktriangleleft\blacktriangleright^{-1}]}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}_k [\blacktriangleleft\blacktriangleright]^{-1}.$$

Quindi, la funzione da trovare, dovrebbe verificare la condizione

$$\frac{\mathcal{F}_k [\blacktriangleleft\blacktriangleright * \blacktriangleleft\blacktriangleright^{-1}]}{\sqrt{2\pi}} = 1,$$

cioè

$$\mathcal{F}_k [\blacktriangleleft\blacktriangleright * \blacktriangleleft\blacktriangleright^{-1}] = \sqrt{2\pi}.$$

La distribuzione che ha trasformata di Fourier costante è la delta di Dirac $\delta(x)$, in particolare si ha

$$\mathcal{F}_k [\delta] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Quindi stiamo cercando una funzione o una distribuzione $\blacktriangleleft\blacktriangleright(x)$, tale da avere convoluzione con la reciproca uguale a 2π -volte la delta di Dirac,

$$(\blacktriangleleft\blacktriangleright * \blacktriangleleft\blacktriangleright^{-1})(x) = 2\pi \delta(x).$$

Usando la definizione della convoluzione e la rappresentazione integrale della delta di Dirac, con anche la condizione di parità,

$$2\pi \delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \blacktriangleleft\blacktriangleright(x-y) \blacktriangleleft\blacktriangleright(y)^{-1} dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm ixy} du,$$

dovremmo cercare una funzione $\blacktriangleleft\blacktriangleright(x)$ tale che

$$\frac{\blacktriangleleft\blacktriangleright(x-y)}{\blacktriangleleft\blacktriangleright(y)} = e^{\pm ixy}.$$

Proviamo $f(x) = e^{ix^2/2}$, quindi $f(x-y) = e^{i(x-y)^2/2}$, la funzione integranda della convoluzione è

$$\begin{aligned} \left(\text{spicchio} * \text{spicchio}^{-1} \right)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-y)^2/2} e^{-iy^2/2} dy = e^{-ix^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iy^2/2 - ixy} e^{-iy^2/2} dy = e^{-ix^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} dy \\ &= 2\pi e^{-ix^2/2} \delta(x). \end{aligned}$$

Non si ottiene solo la delta con il coefficiente 2π , ma anche il fattore esponenziale non costante $e^{-ix^2/2}$. Possiamo usare l'identità formale:

$$g(x)\delta(x-x_0) = g(x_0)\delta(x-x_0),$$

con $x_0 = 0$ e $g(x) = e^{-ix^2/2}$, si ha

$$\left(\text{spicchio} * \text{spicchio}^{-1} \right)(x) = 2\pi e^{-ix^2/2} \delta(x) = 2\pi \delta(x).$$

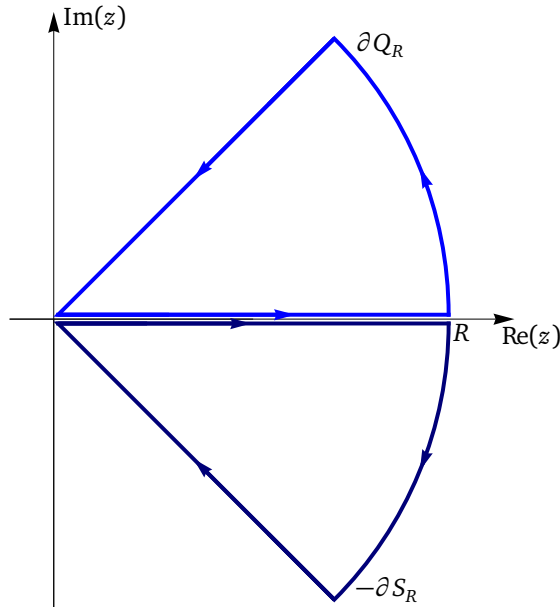
La funzione cercata è

$$\text{spicchio}(x) = e^{ix^2/2}.$$

Verifichiamo, calcolando la trasformata di Fourier della reciproca

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_k \left[\text{spicchio}^{-1} \right] &= \mathcal{F}_k \left[e^{-ix^2/2} \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix^2/2} e^{-ikx} dx = \frac{e^{ik^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(x+k)^2/2} dx \\ &= \left\{ u = \frac{x+k}{\sqrt{2}} \right\} = \frac{e^{ik^2/2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iu^2} du = 2 \frac{e^{ik^2/2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-(e^{i\pi/4}u)^2} du, \end{aligned}$$

nell'ultima identità abbiamo usato la parità della funzione integranda e abbiamo posto: $iu^2 = (\sqrt{i}u)^2 = (e^{i\pi/4}u)^2$.



Calcoliamo l'integrale nel piano complesso usando il percorso chiuso che rappresenta la frontiera dello spicchio del cerchio centrato nell'origine di raggio $R > 0$ e che sottende l'angolo che va da $-\pi/4$ a 0 , ovvero, procedendo in senso antiorario, l'ultimo ottante, lo spicchi è

$$S_R = \{z : z = re^{i\theta}, r \in [0, R], \theta \in (-\pi/4, 0)\},$$

il percorso chiuso è quindi ∂S_R ed è orientato positivamente, in senso antiorario. Per percorrere il tratto della frontiera appartenente all'asse reale da sinistra verso destra, integriamo su $-\partial S_R$, rappresentato in blu scuro nella figura

soprastante, e, nel limite di raggio divergente, si ha

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{-\partial S_R} e^{-iz^2} dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_0^R e^{-ix^2} dx + \int_{|z|=R, \arg(z) \in (-\pi/4, 0)} e^{-iz^2} dz + e^{-i\pi/4} \int_R^0 e^{-(e^{i\pi/4} e^{-i\pi/4} r)^2} dr \right) \\ &= \int_0^\infty e^{-ix^2} dx + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|z|=R, \arg(z) \in (-\pi/4, 0)} e^{-iz^2} dz - e^{-i\pi/4} \int_0^\infty e^{-r^2} dr = \int_0^\infty e^{-ix^2} dx - e^{-i\pi/4} \int_0^\infty e^{-r^2} dr, \end{aligned}$$

l'integrale completo è nullo per il teorema dei residui, infatti la funzione integranda non ha singolarità in S_R , per ogni valore di $R > 0$. L'integrale sull'arco è anch'esso nullo per il lemma di integrazione sugli archi, per $z = Re^{i\theta}$, con $\theta \in (-\pi/4, 0)$, si ha la limitazione

$$\left| e^{-iz^2} z \right| \leq e^{R^2 \sin(2\theta)} R \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0,$$

poiché $\sin(2\theta) < 0$, $\forall \theta \in (-\pi/4, 0)$. Dall'identità della penultima equazione si ha

$$\int_0^\infty e^{-ix^2} dx = e^{-i\pi/4} \int_0^\infty e^{-r^2} dr = \frac{e^{-i\pi/4}}{2} \int_{-\infty}^\infty e^{-r^2} dr = \frac{e^{-i\pi/4}}{2} \sqrt{\pi}.$$

Quindi la trasformata di Fourier della reciproca è

$$\mathcal{F}_k \left[\text{Fourier transform of } \frac{1}{\sqrt{x}} \right]^{-1} = 2 \frac{e^{ik^2/2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-(e^{i\pi/4} u)^2} du = e^{-i\pi/4} e^{ik^2/2}. \quad (1)$$

Quella funzione è, invece,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_k \left[\text{Fourier transform of } \frac{1}{\sqrt{x}} \right] &= \mathcal{F}_k \left[e^{ix^2/2} \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{ix^2/2} e^{-ikx} dx = \frac{e^{-ik^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{i(x-k)^2/2} dx \\ &= \left\{ v = \frac{x-k}{\sqrt{2}} \right\} = \frac{e^{-ik^2/2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{iv^2} dv = 2 \frac{e^{-ik^2/2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-(e^{-i\pi/4} v)^2} dv, \end{aligned}$$

dove abbiamo posto: $iv^2 = -(\sqrt{-i}v)^2 = -(e^{-i\pi/4}v)^2$. Procediamo similmente al caso precedente, usando però lo spicchio Q_R corrispondente al primo ottante,

$$Q_R = \{z : z = re^{i\theta}, r \in [0, R], \theta \in (0, \pi/4)\}.$$

Nel limite $R \rightarrow \infty$ e percorrendo in senso positivo la frontiera ∂Q_R , rappresenta in blu nella figura della pagina precedente,

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{\partial Q_R} e^{iz^2} dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_0^R e^{ix^2} dx + \int_{|z|=R, \arg(z) \in (0, \pi/4)} e^{iz^2} dz + e^{i\pi/4} \int_R^0 e^{-(e^{-i\pi/4} e^{i\pi/4} r)^2} dr \right) \\ &= \int_0^\infty e^{ix^2} dx + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|z|=R, \arg(z) \in (0, \pi/4)} e^{iz^2} dz - e^{i\pi/4} \int_0^\infty e^{-r^2} dr = \int_0^\infty e^{ix^2} dx - e^{i\pi/4} \int_0^\infty e^{-r^2} dr, \end{aligned}$$

dove l'annullamento dell'integrale sull'arco segue da considerazioni analoghe a quelle del caso precedente. Segue che

$$\int_0^\infty e^{ix^2} dx = e^{i\pi/4} \int_0^\infty e^{-r^2} dr = \frac{e^{i\pi/4}}{2} \int_{-\infty}^\infty e^{-r^2} dr = \frac{e^{i\pi/4}}{2} \sqrt{\pi},$$

quindi la trasformata di Fourier vale

$$\mathcal{F}_k \left[\text{Fourier transform of } \frac{1}{\sqrt{x}} \right] = 2 \frac{e^{-ik^2/2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-(e^{-i\pi/4} v)^2} dv = e^{i\pi/4} e^{-ik^2/2}.$$

Si verifica direttamente che le due trasformate, questa e quella di Eq. (1), sono l'una la reciproca dell'altra, cioè

$$\mathcal{F}_k \left[\text{Fourier transform of } \frac{1}{\sqrt{x}} \right]^{-1} = \mathcal{F}_k \left[\text{Fourier transform of } \frac{1}{\sqrt{x}} \right].$$