

# METODI MATEMATICI PER LA FISICA

## PRIMO ESONERO - 25 FEBBRAIO 2015

Si svolgano cortesemente i seguenti esercizi.

### ESERCIZIO 1 (PUNTEGGIO: 2,5/30)

Usando il teorema di Rouché si dimostri che gli zeri del polinomio

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^n a^k z^k, \quad a > 0$$

sono contenuti nel cerchio  $C_R = \{z : |z| < R = 2/a\}$ .

#### SOLUZIONE 1

Il teorema di Rouché afferma che, se  $f(z)$  e  $g(z)$  sono funzioni analitiche, definite nello stesso dominio semplicemente connesso  $\bar{D}$ , tali da verificare:

$$|f(z)| > |g(z)|, \quad \forall z \in \partial D,$$

allora le funzioni  $f(z)$  e  $f(z) + g(z)$  hanno in  $D$  lo stesso numero di zeri.

Siano

$$f(z) = a^n z^n, \quad g(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a^k z^k.$$

Verifichiamo che  $|f(z)|$  è maggiore di  $|g(z)|$  sulla frontiera di  $C_R$ , in cui  $|z| = R = 2/a$ . Si hanno,  $\forall z \in \partial D$ ,

$$|g(z)| \leq \sum_{k=0}^{n-1} a^k \left(\frac{2}{a}\right)^k = 2^n - 1, \quad |f(z)| = a^n \left(\frac{2}{a}\right)^n = 2^n,$$

da cui

$$|f(z)| > |g(z)|, \quad \forall z \in \partial C_R.$$

Ne consegue che la funzione somma, cioè il polinomio,  $f(z) + g(z) = P_n(z)$ , ha in  $C_R$  lo stesso numero di zeri di  $f(z)$ . Ma  $f(z)$  ne ha  $n$  essendo semplicemente proporzionale alla potenza  $n$ -esima della variabile. Anche la somma è un polinomio dello stesso ordine che ha  $n$  zeri, quindi tutti gli zeri del polinomio appartengono a  $C_R$ , la dimostrazione è conclusa.

### ESERCIZIO 2 (PUNTEGGIO 3/30)

Si calcoli l'integrale

$$J = \int_0^1 \frac{dx}{(x^3 - x^4)^{1/4}}.$$

#### SOLUZIONE 2

L'integranda è una funzione polidroma con punti di diramazione in  $z = 0$  e  $z = 1$ . Possiamo definire un taglio sul segmento di integrazione  $[0, 1]$ , e consideriamo il percorso chiuso  $\Gamma$ , mostrato in figura 1, che avvolge tale segmento. La funzione a denominatore dell'integranda può essere posta nella forma

$$(z^3 - z^4)^{1/4} = (f_1^3(z)f_2(z))^{1/4},$$

le funzioni  $f_{1,2}(z)$  generano ciascuna un taglio la cui composizione dà il taglio finale  $[0, 1]$ . Scegliendo le fasi in modo che i due tagli siano nella stessa direzione, lungo l'asse reale, si ottiene quanto desiderato, ovvero che la funzione finale abbia discontinuità nell'intervallo di integrazione. Potremmo scegliere entrambe i tagli orientati nel verso negativo dell'asse reale, ovvero

$$\begin{aligned} f_1(z) &= z = |z|e^{i\theta_1}, & \theta_1 &\in (-\pi, \pi) \\ f_2(z) &= 1 - z = |1 - z|e^{i\theta_2}, & \theta_2 &\in (0, 2\pi) \end{aligned} .$$

In questo caso, sopra il taglio avremo:  $\theta_1 \rightarrow 0^+$ ,  $\theta_2 \rightarrow 2\pi^-$ , quindi

$$(z^3 - z^4)^{1/4} = (x^3 - x^4)^{1/4} e^{i(3\theta_1 + \theta_2)/4} = (x^3 - x^4)^{1/4} e^{i\pi/2} .$$

Sotto:  $\theta_1 \rightarrow 0^-$ ,  $\theta_2 \rightarrow 0^+$ , allora

$$(z^3 - z^4)^{1/4} = (x^3 - x^4)^{1/4} e^{i(3\theta_1 + \theta_2)/4} = (x^3 - x^4)^{1/4} .$$

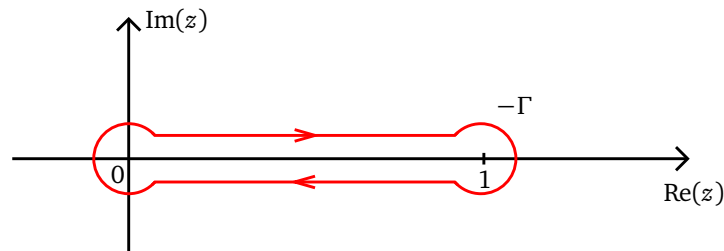


Figure 1: Percorso di integrazione del primo esercizio.

L'integrale su  $-\Gamma$ , si usa il segno "-" per indicare il verso di percorrenza orario, essendo nulli quelli sugli archetti intorno ai punti di diramazione (nel limite di raggio infinitesimo), diventa

$$\oint_{-\Gamma} \frac{dz}{(z^3 - z^4)^{1/4}} = e^{-i\pi/2} \int_0^1 \frac{dx}{(x^3 - x^4)^{1/4}} + \int_1^0 \frac{dx}{(x^3 - x^4)^{1/4}} = J(e^{-i\pi/2} - 1) ,$$

Tale integrale può essere calcolato con il teorema dei residui, considerando tutti quelli relativi alle singolarità che giacciono all'esterno di  $\Gamma$ , ovvero

$$\oint_{-\Gamma} \frac{dz}{(z^3 - z^4)^{1/4}} = 2i\pi \sum_{\text{esterni a } \Gamma} \text{Res} \left[ \frac{1}{(z^3 - z^4)^{1/4}} \right] .$$

L'integranda non ha poli al finito l'unico è quello all'infinito, per cui

$$\begin{aligned} \oint_{-\Gamma} \frac{dz}{(z^3 - z^4)^{1/4}} &= 2i\pi \text{Res} \left[ \frac{1}{(z^3 - z^4)^{1/4}}, z = \infty \right] = -2i\pi \text{Res} \left[ \frac{1/w^2}{(w^{-3} - w^{-4})^{1/4}}, w = 0 \right] \\ &= - \oint_{\gamma_0} \frac{dw}{w(w-1)^{1/4}} = -2i\pi(-1)^{-1/4} = -2i\pi e^{-i\pi/4} , \end{aligned}$$

dove  $\gamma_0$  è una circonferenza centrata nell'origine di raggio minore di uno. Considerando i due risultati si ha

$$J(e^{-i\pi/2} - 1) = -2i\pi e^{-i\pi/4} \Rightarrow J(e^{-i\pi/4} - e^{i\pi/4}) = -2i\pi \Rightarrow -J 2i \sin(\pi/4) = -2i\pi,$$

da cui il risultato finale

$$J = \pi\sqrt{2}.$$

### ESERCIZIO 3 (PUNTEGGIO 3.5/30)

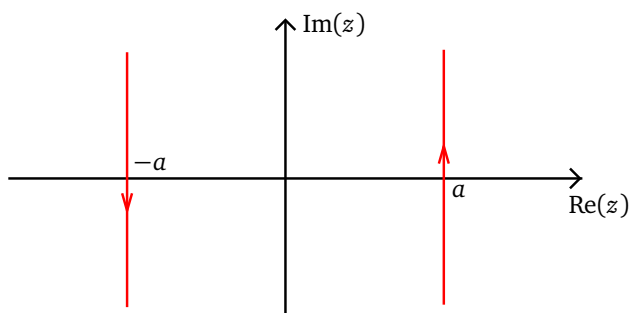
Si studi, per valori reali e positivi di  $a$ , la funzione

$$c(a) = \text{Pr} \int_{R_a} \frac{z^2}{\text{sen}(z)} dz,$$

dove l'integrale è in valore principale e il percorso di integrazione,  $R_a = R_{-a} \cup R_{+a}$ , è l'unione di due rette parallele all'asse immaginario e simmetriche rispetto ad esso, orientate in versi opposti, in particolare

$$R_{\pm a} = \pm \{z : \text{Re}(z) = \pm a\},$$

i segni, posti prima della parentesi graffa, definiscono il verso di percorrenza, con il "+" si intende il verso concorde a quello dell'asse immaginario, con il "-" quello opposto. Le due rette sono mostrate in rosso nella figura accanto.



### SOLUZIONE 3

Il percorso può essere chiuso ai due estremi infiniti, per parti immaginarie divergenti a  $+\infty$  e  $-\infty$ , con due archi. Il contributo di questi archi infiniti è nullo. Infatti, detto  $\gamma_{R+}$ , l'arco superiore, si ha

$$\gamma_{R+} = \left\{ z : z = Re^{i\theta}, \theta \in (\pi/2 - \epsilon, \pi/2 + \epsilon) \right\}, \quad \epsilon = \arctan\left(\frac{a}{R}\right).$$

Dobbiamo dimostrare che

$$\lim_{R \rightarrow \infty} z f(z) = 0, \quad f(z) = \frac{z^2}{\text{sen}(z)},$$

dove il limite è uniforme. A tal fine, troviamo una funzione  $\mu_R$ , reale, positiva e infinitesima al divergere di  $R$ , che limita il modulo di  $z f(z)$ . Studiamo, per economia di simboli, il suo modulo quadro, sull'arco  $\gamma_{R+}$  si ha

$$\begin{aligned} \left| \frac{z^3}{\text{sen}(z)} \right|^2 &= \frac{R^6}{|\text{sen}(R \cos(\theta) + iR \text{sen}(\theta))|^2} = \frac{R^6}{\text{senh}^2(R \text{sen}(\theta)) + \text{sen}^2(R \text{sen}(\theta))} \\ &\leq \frac{R^6}{\text{senh}^2(R \text{sen}(\theta))} \leq \frac{R^6}{\min_{\theta} \{ \text{senh}^2(R \text{sen}(\theta)) \}} = \frac{R^6}{\text{senh}^2(R \text{sen}(\pi/2 - \epsilon))} \\ &< \frac{R^6}{\text{senh}^2(R \text{sen}(\pi/4))} = \frac{4R^6}{(e^{R/\sqrt{2}} - e^{-R/\sqrt{2}})^2} \equiv \mu_R^2. \end{aligned}$$

È banale osservare che la funzione  $\mu_R$ , così ottenuta, verifica la condizione richiesta essendo infinitesima per  $R \rightarrow \infty$ , cioè

$$\mu_R \underset{R \rightarrow \infty}{\sim} 2R^3 e^{-R/\sqrt{2}} \underset{R \rightarrow \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Nel caso dell'arco inferiore,  $\gamma_{R-}$  si ottiene lo stesso risultato.

Nel percorso chiuso, dato dall'unione  $R_a \cup \gamma_{R+} \cup \gamma_{R-}$ , qualora non vi siano singolarità lungo lo stesso percorso, l'integrale può essere calcolato con il teorema dei residui. Le singolarità dell'integranda sono i poli semplici dovuti agli zeri del seno, ovvero  $\{z_k = \pm k\pi, k \in \mathbb{N}\}$ . Consideriamo il caso in cui le due rette non passano per tali poli, possiamo definire questa eventualità richiedendo che il rapporto  $a/\pi$  non sia un numero naturale, cioè  $(a/\pi) \notin \mathbb{N}$ . In questo caso, nel percorso  $R_a \cup \gamma_{R+} \cup \gamma_{R-}$ , cadono i poli  $z_k$  con  $|k| < a/\pi$ , ovvero per i valori

$$k = \pm 1, \pm 2 \dots, \pm \text{Int}(a/\pi),$$

dove con  $\text{Int}(a/\pi)$  si intende la parte intera del rapporto  $a/\pi$ . Lo zero è escluso in quanto è una (ben nota) singolarità eliminabile.

In definitiva, in questo caso, l'integrale in valore principale diventa un integrale normale, ovvero si ha

$$c(a) = \text{Pr} \int_{R_a} \frac{z^2}{\text{sen}(z)} dz = \int_{R_a} \frac{z^2}{\text{sen}(z)} dz = \int_{R_a \cup \gamma_{R+} \cup \gamma_{R-}} \frac{z^2}{\text{sen}(z)} dz = 2i\pi \sum_{\substack{k=-\text{Int}(a/\pi) \\ k \neq 0}}^{\text{Int}(a/\pi)} \text{Res} \left[ \frac{z^2}{\text{sen}(z)}, z = k\pi \right].$$

I residui sono

$$\text{Res} \left[ \frac{z^2}{\text{sen}(z)}, z = k\pi \right] = (-1)^k (k\pi)^2.$$

Sfruttandone la simmetria rispetto al cambiamento di segno  $k \rightarrow -k$ , possiamo scrivere la precedente somma e quindi il risultato, come

$$c(a) = 4i\pi \sum_{k=1}^{\text{Int}(a/\pi)} (-1)^k (k\pi)^2.$$

Nel caso in cui ci siano poli lungo il percorso, ovvero quando  $(a/\pi) = n \in \mathbb{N}$ , è necessario considerare il valore principale, che, per simmetria, coinvolge le due sigolarità in  $z = \pm a = \pm n\pi$ . Lungo le rette  $R_{\pm a}$ , avremo

$$\text{Pr} \int_{R_{\pm a}} \frac{z^2}{\text{sen}(z)} dz = \int_{R_{\pm a \mp \epsilon}} \frac{z^2}{\text{sen}(z)} dz - \int_{-\gamma_{\pm a}} \frac{z^2}{\text{sen}(z)} dz,$$

dove le rette vengono spostate, sottraendo e aggiungendo una parte reale infinitesima  $\epsilon$ , verso l'asse immaginario, cosicché i poli in  $z = \pm n\pi$  cadono all'esterno.

Gli integrali sugli archi infinitesimi,  $\gamma_{\pm a} = \{z : z = \pm a + \epsilon e^{i\alpha}, \alpha \in [\pm\pi/2, \mp\pi/2]\}$ , sono

$$\int_{-\gamma_{\pm a}} \frac{z^2}{\text{sen}(z)} dz = -i\pi(-1)^n (n\pi)^2.$$

Possiamo quindi definire  $c(a)$  con la seguente legge doppia

$$c(a) = \begin{cases} 4i\pi \sum_{k=1}^{\text{Int}(a/\pi)} (-1)^k (k\pi)^2 & \frac{a}{\pi} \notin \mathbb{N} \\ 4i\pi \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k (k\pi)^2 + 2i\pi(-1)^n (n\pi)^2 & \frac{a}{\pi} = n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

La funzione  $c(a)$  è costante a tratti, l'andamento è mostrato nella figura 2.

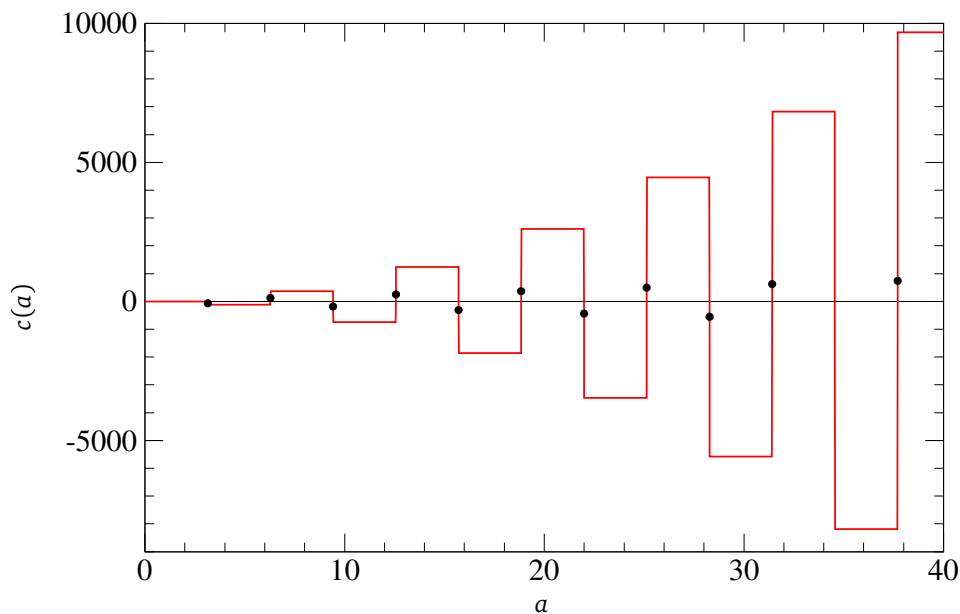


Figure 2: Andamento della funzione  $c(a)$  dell'esercizio numero 3. I punti rappresentano in valori nel caso in cui  $a$  è multiplo intero di  $\pi$ .

#### ESERCIZIO 4 (PUNTEGGIO 3/30)

Si determinino tutti gli sviluppi in serie di Laurent centrati in  $z = 0$  della funzione

$$h(z) = \frac{z}{z^2 + 4} + \frac{1}{(z + 3)^3} + \exp\left(\frac{z + 2}{z}\right).$$

#### SOLUZIONE 4

La funzione  $h(z)$  ha le seguenti singolarità: due poli semplici in  $z_{1,2} = \pm 2i$ , un polo triplo (di ordine tre) in  $z_3 = -3$ , una singolarità essenziale in  $z_0 = 0$ . Ne consegue che ci sono tre possibili corone circolari e tre possibili serie di Laurent di centro  $z = 0$ . Le corone sono:

$$C_1 = \{z : |z_0| = 0 < |z| < |z_{1,2}| = 2\}, \quad C_2 = \{z : 2 < |z| < |z_3| = 3\}, \quad C_3 = \{z : |z| > 3\}.$$

Consideriamo separatamente i tre termini della funzione  $h(z)$  nelle tre corone. Il primo è la funzione razionale

$$h_1(z) = \frac{z}{z^2 + 4}.$$

Nella prima corona, per  $0 < |z| < 2$ , ovvero  $|z^2|/4 < 1$ , usiamo la serie geometrica, come segue

$$h_1^{(1)}(z) = \frac{z}{z^2 + 4} = \frac{z}{4(z^2/4 + 1)} = \frac{z}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{z^2}{4}\right)^k = -\sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^{k+1} z^{2k+1},$$

il numero ad esponente tra parentesi indica la corona cui lo sviluppo in serie si riferisce.

Nella seconda corona,  $2 < |z| < 3$ , si ha  $4/|z^2| < 1$ , quindi

$$h_1^{(2)}(z) = \frac{z}{z^2 + 4} = \frac{1}{z(1 + 4/z^2)} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{4}{z^2}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-4)^k z^{-2k-1}.$$

Nella terza corona,  $|z| > 3$ , si ha  $1 > 9/|z^2| > 4/|z^2|$ , vale anche qui la serie precedente,  $h_1^{(3)}(z) = h_1^{(2)}(z)$ . Il secondo termine della funzione è

$$h_2(z) = \frac{1}{(z+3)^3},$$

per poterlo ricondurre alla serie geometrica, osserviamo che

$$h_2(z) = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2} \frac{1}{z+3}.$$

Nella prima corona,  $0 < |z| < 2$ , in particolare  $|z|/3 < 1$ , allora

$$h_2^{(1)} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2} \frac{1}{3(z/3+1)} = \frac{1}{6} \frac{d^2}{dz^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^k z^k = -\frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \left(-\frac{1}{3}\right)^{k+1} z^{k-2}.$$

Nella seconda corona,  $2 < |z| < 3$ , si ha ancora  $|z|/3 < 1$ , quindi  $h_2^{(2)}(z) = h_2^{(1)}(z)$ . Nella terza, invece,  $|z| > 3$ , cioè:  $3/|z| < 1$ ,

$$h_2^{(3)}(z) = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2} \frac{1}{z(1+3/z)} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-3)^k z^{-k-1} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2) (-3)^k z^{-k-3}.$$

Infine, il terzo termine

$$h_3(z) = \exp\left(\frac{z+2}{z}\right),$$

ha uno sviluppo in serie che converge ovunque ad eccezione dell'origine. In particolare si ha

$$h_3^{(1)}(z) = h_3^{(2)}(z) = h_3^{(3)}(z) = e^{1+2/z} = e e^{2/z} = e \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} z^{-k}.$$

Riassemblando, a partire dalla prima corona si ha

$$\begin{aligned} h^{(1)}(z) &= \sum_{j=1}^3 h_j^{(1)}(z) = -\sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^{k+1} z^{2k+1} - \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \left(-\frac{1}{3}\right)^{k+1} z^{k-2} + e \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} z^{-k} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} a_m^{(1)} z^m + \sum_{m=0}^{\infty} b_m^{(1)} z^m + \sum_{m=-\infty}^0 c_m^{(1)} z^m \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} t_m^{(1)} z^m, \end{aligned}$$

con

$$a_m^{(1)} = \begin{cases} -\left(-\frac{1}{4}\right)^{(m+1)/2} & m \text{ dispari} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}, \quad b_m^{(1)} = -\frac{(m+1)(m+2)}{2} \left(-\frac{1}{3}\right)^{m+3}, \quad c_m^{(1)} = e \frac{2^{-m}}{(-m)!},$$

mentre il coefficiente unico è

$$t_m^{(1)} = \begin{cases} c_m^{(1)} & m \leq -1 \\ c_m^{(1)} + b_m^{(1)} & m = 0 \\ b_m^{(1)} + a_m^{(1)} & m \geq 1 \end{cases}.$$

Nella seconda corona

$$\begin{aligned} h^{(2)}(z) &= \sum_{j=1}^3 h_j^{(2)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-4)^k z^{-2k-1} - \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \left(-\frac{1}{3}\right)^{k+1} z^{k-2} + e \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} z^{-k} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{-1} a_m^{(2)} z^m + \sum_{m=0}^{\infty} b_m^{(2)} z^m + \sum_{m=-\infty}^0 c_m^{(2)} z^m \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} t_m^{(2)} z^m, \end{aligned}$$

con

$$a_m^{(2)} = \begin{cases} -(-4)^{-(m+1)/2} & -m \text{ dispari} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}, \quad b_m^{(2)} = b_m^{(1)}, \quad c_m^{(2)} = c_m^{(1)},$$

il secondo coefficiente unico è

$$t_m^{(2)} = \begin{cases} a_m^{(2)} + c_m^{(2)} & m \leq -1 \\ c_m^{(2)} + b_m^{(2)} & m = 0 \\ b_m^{(2)} & m \geq 1 \end{cases}.$$

Infine, nella terza corona si ha

$$\begin{aligned} h^{(3)}(z) &= \sum_{j=1}^3 h_j^{(3)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-4)^k z^{-2k-1} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2) (-3)^k z^{-k-3} + e \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} z^{-k} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{-1} a_m^{(3)} z^m + \sum_{m=-\infty}^{-3} b_m^{(3)} z^m + \sum_{m=-\infty}^0 c_m^{(3)} z^m \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} t_m^{(3)} z^m, \end{aligned}$$

con

$$a_m^{(3)} = a_m^{(2)}, \quad b_m^{(3)} = \frac{(m+1)(m+2)}{2} (-3)^{-m-3}, \quad c_m^{(3)} = c_m^{(1)},$$

l'ultimo coefficiente unico è

$$t_m^{(3)} = \begin{cases} a_m^{(3)} + b_m^{(3)} + c_m^{(3)} & m \leq -3 \\ a_m^{(3)} + b_m^{(3)} & -2 \leq m \leq -1 \\ c_m^{(3)} & m = 0 \end{cases}.$$

## ESERCIZIO 5 (PUNTEGGIO 3.5/30)

Siano  $f(z)$  e  $g(z)$  funzioni intere che non si annullano negli stessi punti, ovvero gli insiemi  $\{t_k\}$  e  $\{s_j\}$  degli zeri di  $f(z)$  e  $g(z)$  rispettivamente, verificano la condizione  $\{t_k\} \cap \{s_j\} = \emptyset$ . Usando il teorema di Mittag-Leffler, si dimostri che esistono due funzioni intere  $h(z)$  e  $e(z)$  tali da verificare l'identità

$$f(z)h(z) + g(z)e(z) = A, \quad A \neq 0.$$

## SOLUZIONE 5

Dall'identità si ottiene per  $h(z)$

$$h(z) = \frac{A - g(z)e(z)}{f(z)} = \frac{A}{f(z)} - \frac{g(z)e(z)}{f(z)} = g(z) \left( \frac{A}{f(z)g(z)} - \frac{e(z)}{f(z)} \right),$$

la funzione tra parentesi è meromorfa in quanto somma di funzioni meromorfe, rapporti di funzioni intere. Affinché  $h(z)$  sia intera è necessario che la funzione tra parentesi sia essa stessa intera essendo tale  $g(z)$ . La prima delle due funzioni tra parentesi è data ed ha, per ipotesi, due insiemi distinti di poli corrispondenti agli zeri distinti della  $f(z)$  e della  $g(z)$ , quindi possiamo scrivere l'espansione di Mittag-Leffler

$$\frac{A}{f(z)g(z)} = G(z) + \sum_k T_k(z) + \sum_j S_j(z),$$

dove  $G(z)$  è la parte intera, mentre  $T_k(z)$  e  $S_j(z)$  rappresentano le parti principali degli sviluppi in serie di Laurent centrati nei poli  $\{t_k\}$  e  $\{s_j\}$ , rispettivamente.

Definiamo una funzione meromorfa,  $\phi(z)$ , che abbia le parti principali  $\{T_k(z)\}$ , ovvero

$$\phi(z) = F(z) + \sum_k T_k(z),$$

ne consegue che, definendo la funzione intera  $e(z)$  cercata, come

$$e(z) = \phi(z)f(z),$$

si ha anche

$$h(z) = g(z) \left( \frac{A}{f(z)g(z)} - \phi(z) \right).$$

Verifichiamo che le funzioni così ottenute sono intere.

Poiché  $\phi(z)$ , per costruzione, ha, in corrispondenza degli zeri di  $f(z)$ , poli dello stesso ordine, il prodotto  $\phi(z)f(z)$  è una funzione intera. Più in dettaglio possiamo usare per la  $f(z)$  l'espansione di Weierstrass

$$f(z) = f(0)e^{zf'(0)/f(0)} \prod_k \left( 1 - \frac{z}{t_k} \right)^{\beta_k} e^{\beta_k z/t_k} = \prod_k \gamma_k(z) (z - t_k)^{\beta_k},$$

dove  $\{\beta_k\} \subset \mathbb{N}$ , è l'insieme delle molteplicità degli zeri di  $f(z)$  e dei poli di  $\phi(z)$ , le funzioni  $\gamma_k(z)$  sono proporzionali ad esponenziali, quindi intere e prive di zeri

utilizziamo la seconda definizione per economia di simboli, . L'espansione di Mittag-Leffler della  $\phi(z)$ , esplicitando la somma delle parti principali, è

$$\phi(z) = F(z) + \sum_k \sum_{j=-\beta_k}^{-1} C_j^{(k)} (z - t_k)^j,$$

dove  $C_j^{(k)}$  rappresenta il  $j$ -esimo coefficiente di Laurent centrata nel  $k$ -esimo polo,  $t_k$ , di ordine  $\beta_k$ . Per il prodotto si ha

$$\begin{aligned} f(z)\phi(z) &= F(z) \prod_k \gamma_k(z) (z - t_k)^{\beta_k} + \sum_k \sum_{j=-\beta_k}^{-1} C_j^{(k)} (z - t_k)^j \prod_{k'} \gamma_{k'}(z) (z - t_{k'})^{\beta_{k'}} \\ &= F(z) \prod_k \gamma_k(z) (z - t_k)^{\beta_k} + \sum_k \sum_{j=-\beta_k}^{-1} C_j^{(k)} (z - t_k)^{j+\beta_k} \gamma_k(z) \prod_{k' \neq k} \gamma_{k'}(z) (z - t_{k'})^{\beta_{k'}} \\ &= F(z) \prod_k \gamma_k(z) (z - t_k)^{\beta_k} + \sum_k \sum_{l=0}^{\beta_k-1} C_{l-\beta_k}^{(k)} (z - t_k)^l \gamma_k(z) \prod_{k' \neq k} \gamma_{k'}(z) (z - t_{k'})^{\beta_{k'}}, \quad (l = j + \beta_k), \end{aligned}$$

dove abbiamo estratto dal prodotto su  $k'$  il fattore  $k$ -esimo che compensa le potenze negative nella somma delle parti principali. Non ci sono più potenze negative, quindi  $e(z) = f(z)\phi(z)$  è **intera**.

Lo stesso argomento vale anche per  $h(z)$  che, infatti, è definita come il prodotto di una funzione intera,  $g(z)$ , ed una meromorfa

$$\frac{1}{f(z)g(z)} - \phi(z) = G(z) - F(z) + \sum_j S_j(z),$$

che, per costruzione della  $\phi(z)$ , ha solo i poli corrispondenti agli zeri  $\{s_j\}$  di  $g(z)$ . La moltiplicazione cancella esattamente i poli come è accaduto per  $f(z)\phi(z)$ .

### ESERCIZIO 6 (PUNTEGGIO 3/30)

Si verifichi lo sviluppo di Mittag-Leffler

$$f(z) = \frac{1}{\cos^2(z) - \cos^2(t)} = \frac{1}{1 - \cos^2(t)} - \frac{2}{\operatorname{sen}(2t)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^2}{[z^2 - (t + n\pi)^2] (t + n\pi)},$$

con  $t$  reale,  $0 < |t| < \pi$  e  $|t| \neq \pi/2$ .

### SOLUZIONE 6

La funzione è meromorfa e, essendo  $|t| \neq \pi/2$ , può essere riscritta come

$$f(z) = \left( \frac{1}{\cos(z) - \cos(t)} - \frac{1}{\cos(z) + \cos(t)} \right) \frac{1}{2 \cos(t)} = \frac{f_a(z) - f_b(z)}{2 \cos(t)},$$

con

$$f_{a,b}(z) = \frac{1}{\cos(z) \mp \cos(t)}.$$

Entrambe le funzioni hanno solo poli semplici, in particolare, indicando con  $\{a_k^\pm\}$  e  $\{b_k^\pm\}$ , quelli di  $f_a(z)$  e  $f_b(z)$  rispettivamente, si hanno

$$a_k^\pm = \pm t + 2k\pi, \quad b_k^\pm = \pm t + (2k+1)\pi, \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

inoltre, i poli non sono coincidenti:  $\{a_k^\pm\} \cap \{b_k^\pm\} = \emptyset$ . Il segno ad esponente indica il segno del termine  $t$ , ovvero, a parità di indice  $k$  si hanno due poli distinti, sia per  $f_a(z)$  che per  $f_b(z)$ . I residui,  $A_k^\pm$  e  $B_k^\pm$ , sono opposti, infatti

$$A_k^\pm = \lim_{z \rightarrow a_k^\pm} f_a(z)(z - a_k^\pm) = \frac{1}{-\operatorname{sen}(a_k^\pm)} = \mp \frac{1}{\operatorname{sen}(t)},$$

$$B_k^\pm = \lim_{z \rightarrow b_k^\pm} f_b(z)(z - b_k^\pm) = \frac{1}{-\operatorname{sen}(b_k^\pm)} = \pm \frac{1}{\operatorname{sen}(t)}.$$

Gli sviluppi saranno

$$\begin{aligned} f_a(z) &= G_a(z) - \frac{1}{\operatorname{sen}(t)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{z - a_k^+} - \frac{1}{z - a_k^-} \right] = G_a(z) - \frac{1}{\operatorname{sen}(t)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{z - t - 2k\pi} - \frac{1}{z + t - 2k\pi} \right] \\ &= G_a(z) - \frac{1}{\operatorname{sen}(t)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{z - t - 2k\pi} - \frac{1}{z + t + 2k\pi} \right] = G_a(z) - \frac{2}{\operatorname{sen}(t)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{t + 2k\pi}{z^2 - (t + 2k\pi)^2}; \\ f_b(z) &= G_b(z) + \frac{1}{\operatorname{sen}(t)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{z - b_k^+} - \frac{1}{z - b_k^-} \right] = G_b(z) + \frac{1}{\operatorname{sen}(t)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{z - t - (2k+1)\pi} - \frac{1}{z + t - (2k+1)\pi} \right] \\ &= G_b(z) + \frac{1}{\operatorname{sen}(t)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{z - t - (2k+1)\pi} - \frac{1}{z + t + (2k+1)\pi} \right] = G_b(z) + \frac{2}{\operatorname{sen}(t)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{t + (2k+1)\pi}{z^2 - [t + (2k+1)\pi]^2}, \end{aligned}$$

dove la funzione  $G_{a,b}(z)$  rappresenta la parte intera di  $f_{a,b}(z)$ . La limitatezza asintotica su circonferenze, centrate nell'origine e non passanti per i poli, implica che  $G_{a,b}(z)$  sia costante. La determiniamo valutando la funzione nell'origine, ovvero, nei due casi si hanno

$$G_a(0) = f_a(0) - \frac{2}{\operatorname{sen}(t)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{t + 2k\pi} = \frac{1}{1 - \cos(t)} - \frac{2}{\operatorname{sen}(t)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{t + 2k\pi};$$

$$G_b(0) = f_b(0) + \frac{2}{\operatorname{sen}(t)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{t + (2k+1)\pi} = \frac{1}{1 + \cos(t)} + \frac{2}{\operatorname{sen}(t)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{t + (2k+1)\pi}.$$

Mettiamo insieme i risultati

$$f_a(z) = \frac{1}{1 - \cos(t)} - \frac{2}{\operatorname{sen}(t)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{t + 2k\pi} + \frac{t + 2k\pi}{z^2 - (t + 2k\pi)^2} \right]$$

$$= \frac{1}{1 - \cos(t)} - \frac{2}{\operatorname{sen}(t)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{z^2}{(t + 2k\pi) [z^2 - (t + 2k\pi)^2]};$$

$$f_b(z) = \frac{1}{1 + \cos(t)} + \frac{2}{\operatorname{sen}(t)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{t + (2k+1)\pi} + \frac{t + (2k+1)\pi}{z^2 - (t + (2k+1)\pi)^2} \right]$$

$$= \frac{1}{1 + \cos(t)} + \frac{2}{\operatorname{sen}(t)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{z^2}{(t + (2k+1)\pi) [z^2 - (t + (2k+1)\pi)^2]}.$$

Infine, la funzione completa

$$f(z) = \frac{f_a(z) - f_b(z)}{2 \cos(t)}$$

$$= \frac{1}{1 - \cos^2(t)} - \frac{1}{\cos(t) \operatorname{sen}(t)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{z^2}{(t + 2k\pi) [z^2 - (t + 2k\pi)^2]} + \frac{z^2}{(t + (2k+1)\pi) [z^2 - (t + (2k+1)\pi)^2]} \right\}.$$

I due termini nella parentesi graffa contengono multipli pari, positivi e negativi, e dispari, anch'essi positivi e negativi, di  $\pi$ , possiamo, quindi, scriverli in un'unica forma, come

$$f(z) = \frac{1}{1 - \cos^2(t)} - \frac{2}{\operatorname{sen}(2t)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^2}{[z^2 - (t + n\pi)^2] (t + n\pi)},$$

questo è il risultato cercato.

Consideriamo anche il caso escluso  $t = 1/2$ , caso in cui la funzione diventa

$$f_{1/2}(z) = \frac{1}{\cos^2(z)}$$

ed ha poli doppi nei punti  $z_n = (2n+1)\pi/2, \forall n \in \mathbb{Z}$ . L'espansione di Mittag-Leffler è quindi

$$f_{1/2}(z) = G + \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n(z),$$

dove  $G$  è la parte intera costante e le funzioni  $P_n(z)$  sono le parti principali degli sviluppi di Laurent in ogni  $z_n$ , cioè

$$P_n(z) = \frac{C_{-2}^{(n)}}{(z - z_n)^2} + \frac{C_{-1}^{(n)}}{z - z_n}.$$

Per ottenere i valori dei coefficienti usiamo lo sviluppo in serie di Taylor del coseno intorno ad un suo zero semplice  $z_n$ , si ha

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z - z_n)^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Ne consegue che, nell'intorno di  $z_n$ , avremo

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos^2(z)} &= \left[ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(z - z_n)^{2k+1}}{(2k+1)!} \right]^{-2} \\ &= \frac{1}{(z - z_n)^2} \left[ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(z - z_n)^{2k}}{(2k+1)!} \right]^{-2} \\ &= \frac{1}{(z - z_n)^2} \left\{ 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(z - z_n)^{2k}}{(2k+1)!} + O \left[ \left( \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(z - z_n)^{2k}}{(2k+1)!} \right)^2 \right] \right\} \\ &= \frac{1}{(z - z_n)^2} + \frac{1}{3} + O \left[ (z - z_n)^2 \right], \end{aligned}$$

da cui,  $\forall n \in \mathbb{Z}$ ,  $C_{-2}^{(n)} = 1$  e  $C_{-1}^{(n)} = 0$  e le funzioni  $P_n(z)$  hanno la forma "dipolare"

$$P_n(z) = \frac{1}{(z - z_n)^2}.$$

Infine, determiniamo  $G$  sapendo che  $f_0(0) = 1$ ,

$$G = f_0(0) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n(0) = 1 - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z_n^2}.$$

L'espansione completa è

$$f_0(z) = 1 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ -\frac{1}{z_n^2} + \frac{1}{(z - z_n)^2} \right] = 1 + z \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2z_n - z}{z_n^2 (z - z_n)^2}.$$

Dimostriamo che nel limite  $t \rightarrow \pm\pi/2$  l'espressione

$$f(z) = \frac{1}{1 - \cos^2(t)} - \frac{2}{\sin(2t)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^2}{[z^2 - (t + n\pi)^2] (t + n\pi)}$$

tende alla precedente per  $f_0(z)$ , ovvero che anche il caso escluso può essere considerato da questa espansione. Se  $t \rightarrow \pm\pi/2$  il primo termine tende all'unità, quindi rimane da verificare il limite della somma, ovvero l'identità cercata è

$$\lim_{t \rightarrow \pm\pi/2} \frac{-2}{\sin(2t)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^2}{[z^2 - (t + n\pi)^2] (t + n\pi)} = z \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2z_n - z}{z_n^2 (z - z_n)^2}.$$

Per prima cosa osserviamo che

$$\lim_{t \rightarrow \pm\pi/2} (t + n\pi) = \pm z_{\pm n},$$

e che quindi la prima somma si annulla per simmetria. In dettaglio, avremo

$$\lim_{t \rightarrow \pm\pi/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^2}{[z^2 - (t + n\pi)^2] (t + n\pi)} = \pm \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^2}{(z^2 - z_n^2) z_n} = 0,$$

ovvero la forma

$$\lim_{t \rightarrow \pm\pi/2} \frac{-2}{\operatorname{sen}(2t)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^2}{[z^2 - (t + n\pi)^2] (t + n\pi)}$$

è di tipo 0/0. Applichiamo il de l'Hôpital e si ha

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \pm\pi/2} \frac{-2}{\operatorname{sen}(2t)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^2}{[z^2 - (t + n\pi)^2] (t + n\pi)} &= \lim_{t \rightarrow \pm\pi/2} \frac{-1}{\cos(2t)} \frac{d}{dt} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^2}{[z^2 - (t + n\pi)^2] (t + n\pi)} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^2 (3z_n^2 - z^2)}{(z^2 - z_n^2)^2 z_n^2} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^2 (3z_n^2 - z^2)}{(z - z_n)^2 (z + z_n)^2 z_n^2}, \end{aligned}$$

a partire dalla seconda identità non distinguiamo più i due casi "±" perché, grazie alla simmetria dell'intervallo di somma e alla parità della funzione rispetto a  $z_n \rightarrow z_{-n}$ , risultano coincidenti. Vogliamo riscrivere il numeratore fattorizzando  $(z + z_n)^2$ , così da ottenere lo stesso denominatore che si desidera. A tal fine, usando i due coefficienti da determinare  $A$  e  $B$ , scriviamo

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^2 (3z_n^2 - z^2)}{(z - z_n)^2 (z + z_n)^2 z_n^2} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(z + z_n)^2 (A + Bz_n)}{(z - z_n)^2 (z + z_n)^2 z_n^2} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z_n^3 B + z_n^2 (A + 2zB) + z_n (2zA + z^2 B) + z^2 A}{(z - z_n)^2 (z + z_n)^2 z_n^2} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z_n^2 (A + 2zB) + z^2 A}{(z - z_n)^2 (z + z_n)^2 z_n^2}. \end{aligned}$$

È facile vedere che le uniche condizioni che dobbiamo applicare per fissare i coefficienti  $A$  e  $B$  sono quelle relative alle potenze pari di  $z_n$ , essendo il denominatore pari, i termini contenenti potenze dispari di  $z_n$  non contribuiscono alla somma, simmetrica in  $n$ , quindi sono stati eliminati. Dobbiamo dunque richiedere che

$$A = -z^2, \quad A + 2zB = 3z^2 \quad \Rightarrow \quad B = 2z.$$

Ricapitolando

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \pm\pi/2} \frac{-2}{\operatorname{sen}(2t)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^2}{[z^2 - (t + n\pi)^2] (t + n\pi)} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^2 (3z_n^2 - z^2)}{(z - z_n)^2 (z + z_n)^2 z_n^2} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A + Bz_n}{(z - z_n)^2 z_n^2} \\ &= z \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2z_n - z}{(z - z_n)^2 z_n^2}, \end{aligned}$$

che è l'identità richiesta.