

METODI MATEMATICI PER LA FISICA

PRIMO APPELLO ESTIVO - 24 GIUGNO 2026

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che il punteggio assegnato a ciascuna procedura di risoluzione può variare tra lo zero e il massimo indicato ed è stabilito valutando:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo;
6. la bellezza e l'armonia del tutto.

PRIMO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si calcoli l'integrale in valore principale

$$\angle = \text{Pr} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2 \cos(t) + \sin^2(t)}.$$

Curiosità. Ci sono scoperte e invenzioni che hanno un valore così elevato da sfuggire a ogni fine lucrativo. L'appagamento, la soddisfazione, l'orgoglio, il piacere nel constatarne gli effetti positivi generalizzati nell'ambito in cui si applicano, sono così grandi da rendere ogni loro valutazione quantitativa solo sminuente, limitante, quasi offensiva. Le persone, gli enti, i gruppi artefici di queste scoperte e invenzioni decidono quindi di non brevettare la loro idea, oppure di farlo, rendendone libero l'utilizzo. I simboli non convenzionali usati nei problemi rappresentano un insieme di queste scoperte e invenzioni.

Il simbolo \angle , che indica il valore dell'integrale del primo problema, schematizza una cintura di sicurezza a tre punti, evidenziati dai tre dischi rossi, inventata nel 1959 dall'ingegnere svedese **Nils Bohlin**, che al tempo lavorava per la casa automobilistica Volvo. Nils Bohlin fece richiesta di brevetto per questa particolare cintura di sicurezza, però, essendosi dimostrata un dispositivo salvavita, la Volvo decise di non trarre vantaggi economici dalla sua commercializzazione, permettendo così a tutte le case costruttrici di utilizzarne il progetto senza il pagamento di alcun diritto di sfruttamento.

SOLUZIONE DEL PRIMO PROBLEMA

La funzione integranda è meromorfa, essendo l'inversa di una funzione intera. Ne calcoliamo le singolarità risolvendo l'equazione nella variabile t ,

$$2 \cos(t) + \sin^2(t) = 0.$$

Posto $\sin^2(t) = 1 - \cos^2(t)$, si ha

$$\cos^2(t) - 2 \cos(t) - 1 = 0,$$

da cui

$$\cos(t_{\pm}) = 1 \pm \sqrt{2},$$

dove, per la periodicità della funzione coseno, i valori t_{\pm} sono definiti a meno di multipli interi di 2π , cioè, sono soluzioni tutti i valori dell'insieme

$$\{t_- + 2k\pi\}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \{t_+ + 2k\pi\}_{k \in \mathbb{Z}}.$$

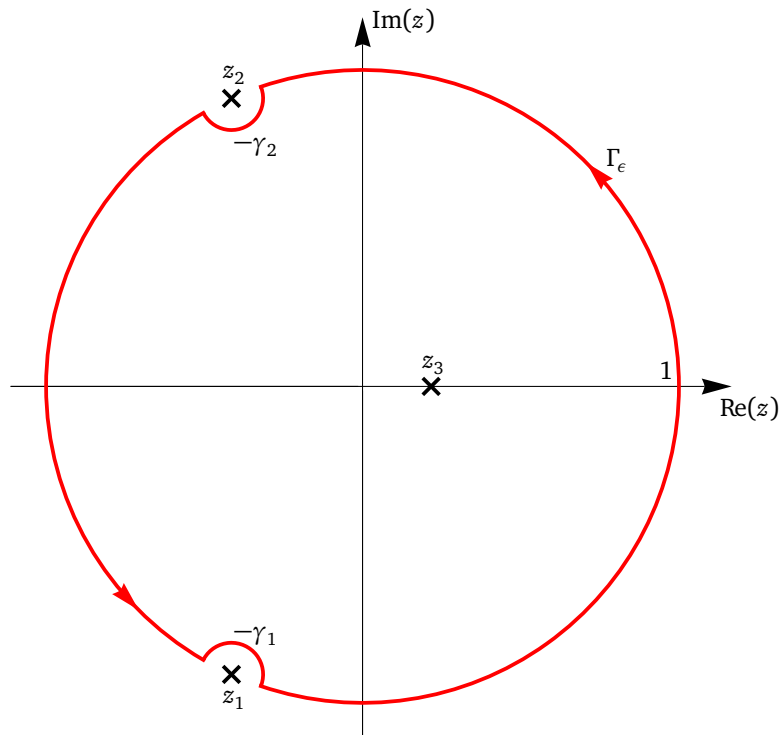
Poiché $\cos(t_-) = 1 - \sqrt{2} \in [-1, 1]$, ci sono due valori di t_- appartenenti all'intervallo d'integrazione $[0, 2\pi]$ ed è rispetto a questi che va calcolato il valore principale. Facendo la sostituzione $z = e^{it}$, per passare all'integrazione nel

piano complesso, le singolarità della funzione integranda nella variabile complessa z si ottengono dall'equazione

$$\cos(t_{\pm}) = \frac{z + z^{-1}}{2} \Rightarrow z^2 - 2z \cos(t_{\pm}) + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} z_1 = \cos(t_-) - \sqrt{\cos^2(t_-) - 1} = 1 - \sqrt{2} - \sqrt{2 - 2\sqrt{2}} \\ z_2 = \cos(t_-) + \sqrt{\cos^2(t_-) - 1} = 1 - \sqrt{2} + \sqrt{2 - 2\sqrt{2}} \\ z_3 = \cos(t_+) - \sqrt{\cos^2(t_+) - 1} = 1 + \sqrt{2} - \sqrt{2 + 2\sqrt{2}} \\ z_4 = \cos(t_+) + \sqrt{\cos^2(t_+) - 1} = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{2 + 2\sqrt{2}} \end{cases}.$$

Come dedotto studiando le soluzioni nella variabile t , quelle corrispondenti a t_- appartengono al percorso d'integrazione, ciò significa che nel piano complesso z , queste singolarità giacciono sulla circonferenza unitaria. Infatti, i moduli quadri delle singolarità z_1 e z_2 , che, inoltre, sono l'una complessa coniugata dell'altra, valgono

$$|z_{1,2}|^2 = \text{Re}^2(z_{1,2}) + \text{Im}^2(z_{1,2}) = (1 - \sqrt{2})^2 + (\sqrt{2 - 2\sqrt{2}})^2 = 1.$$



Le altre due singolarità, z_3 e z_4 sono reali e solo la prima è avvolta dal percorso d'integrazione, infatti:

$$z_3 = 1 - \sqrt{2} - \sqrt{2 + 2\sqrt{2}} \simeq 0,22, \quad z_4 = 1 - \sqrt{2} + \sqrt{2 + 2\sqrt{2}} \simeq 4,61.$$

Le prime tre singolarità, rappresentate dai simboli "x" e il percorso d'integrazione Γ_ϵ , in rosso, nel piano complesso z sono mostrate nella figura soprastante. In dettaglio, nella variabile z , l'integrale diventa

$$\mathcal{L} = 4i \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{\Gamma_\epsilon} \frac{z dz}{z^4 - 4z^3 - 2z^2 - 4z + 1} - \int_{-\gamma_1} \frac{z dz}{z^4 - 4z^3 - 2z^2 - 4z + 1} - \int_{-\gamma_2} \frac{z dz}{z^4 - 4z^3 - 2z^2 - 4z + 1} \right),$$

dove Γ_ϵ è la circonferenza unitaria dentata con gli archi $-\gamma_1$ e $-\gamma_2$, rispettivamente intorno a z_1 e z_2 , mostrata in figura. Gli archi hanno il segno negativo poiché sono percorsi in verso orario, cioè negativo, quando Γ_ϵ lo è in verso positivo, cioè antiorario. Usando il teorema dei residui e i lemmi per l'integrazione sugli archi infinitesimi, si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= 2i\pi \text{Res} \left[\frac{4iz}{z^4 - 4z^3 - 2z^2 - 4z + 1}, z_3 \right] + i\pi \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{4iz(z - z_1)}{z^4 - 4z^3 - 2z^2 - 4z + 1} + i\pi \lim_{z \rightarrow z_2} \frac{4iz(z - z_2)}{z^4 - 4z^3 - 2z^2 - 4z + 1} \\ &= -4\pi \left(\frac{2z_3}{(z_3 - z_1)(z_3 - z_2)(z_3 - z_4)} + \frac{z_1}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)(z_1 - z_4)} + \frac{z_2}{(z_2 - z_1)(z_2 - z_3)(z_2 - z_4)} \right) \\ &= -4\pi \left(\frac{2z_3}{(z_3 - z_1)(z_3 - z_2)(z_3 - z_4)} + 2\text{Re} \left(\frac{z_1}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)(z_1 - z_4)} \right) \right). \end{aligned}$$

Calcoliamo il secondo termine, in particolare il numero complesso di cui dobbiamo estrarre la parte reale,

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)(z_1 - z_4)} &= \frac{1 - \sqrt{2} - \sqrt{2}\sqrt{1 - \sqrt{2}}}{-2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}(-2\sqrt{2} - \sqrt{2} - 2\sqrt{2} + \sqrt{2} + 2\sqrt{2})(-2\sqrt{2} - \sqrt{2} - 2\sqrt{2} - \sqrt{2} + 2\sqrt{2})} \\ &= \frac{1 - \sqrt{2} - \sqrt{2}\sqrt{1 - \sqrt{2}}}{-2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}(8 - 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}\sqrt{2} - 2\sqrt{2})} \\ &= \frac{1 - \sqrt{2} - \sqrt{2}\sqrt{1 - \sqrt{2}}}{-2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}(-4\sqrt{2}(1 - \sqrt{2}) + 8\sqrt{1 - \sqrt{2}})} \\ &= \frac{1 - \sqrt{2} - \sqrt{2}\sqrt{1 - \sqrt{2}}}{8\sqrt{2}\sqrt{2} - 2\sqrt{2}(1 - \sqrt{2} - \sqrt{2}\sqrt{1 - \sqrt{2}})} = \frac{1}{8\sqrt{2}\sqrt{2} - 2\sqrt{2}} = \frac{1}{16\sqrt{1 - \sqrt{2}}} \\ &= \frac{-i}{16\sqrt{\sqrt{2} - 1}}, \end{aligned}$$

è un numero immaginario puro, quindi la parte reale è nulla. L'integrale cercato è

$$\begin{aligned} \angle &= -8\pi \frac{z_3}{(z_3 - z_1)(z_3 - z_2)(z_3 - z_4)} \\ &= -8\pi \frac{1 + \sqrt{2} - \sqrt{2} + 2\sqrt{2}}{(2\sqrt{2} - \sqrt{2} + 2\sqrt{2} + \sqrt{2} - 2\sqrt{2})(2\sqrt{2} - \sqrt{2} + 2\sqrt{2} - \sqrt{2} - 2\sqrt{2})(-2\sqrt{2} + 2\sqrt{2})} \\ &= -8\pi \frac{1 + \sqrt{2} - \sqrt{2}\sqrt{1 + \sqrt{2}}}{4\sqrt{2}(1 + \sqrt{2} - \sqrt{2}\sqrt{1 + \sqrt{2}})(-2\sqrt{2}\sqrt{1 + \sqrt{2}})} \\ &= -8\pi \frac{1}{-16\sqrt{1 + \sqrt{2}}} = \pi \frac{1}{2\sqrt{1 + \sqrt{2}}}, \end{aligned}$$

moltiplichiamo e dividiamo per $\sqrt{\sqrt{2} - 1}$ così da ottenere il risultato finale

$$\angle = \frac{\pi}{2} \sqrt{\sqrt{2} - 1}.$$

SECONDO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$\text{🧴} = \int_0^{\infty} \frac{\tanh(x)}{x(x^2 + \pi^2)} dx.$$

Curiosità. Il simbolo 🧴 usato per indicare l'integrale rappresenta un flacone di penicillina. Questo antibiotico fu scoperto nel 1928 dal batteriologo scozzese **Alexander Fleming**, che, al fine di renderne l'utilizzo benefico accessibile a tutte e tutti, decise di non registrare il brevetto. Questa scelta permise, inoltre, ad altre scienziate e altri scienziati di usare liberamente i risultati ottenuti da Alexander Fleming per ottimizzare i processi produttivi su larga scala del farmaco. La scoperta valse ad Alexander Fleming il premio Nobel per la medicina nel 1945.

SOLUZIONE DEL SECONDO PROBLEMA

La funzione integranda è pari, estendiamo l'intervallo d'integrazione a tutto l'asse reale e separiamo nei due contributi con singolarità in $\pm i\pi$,

$$\text{🧴} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tanh(x)}{x(x^2 + \pi^2)} dx = \frac{1}{4i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tanh(x)}{x(x - i\pi)} dx - \frac{1}{4i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tanh(x)}{x(x + i\pi)} dx \equiv S_- - S_+,$$

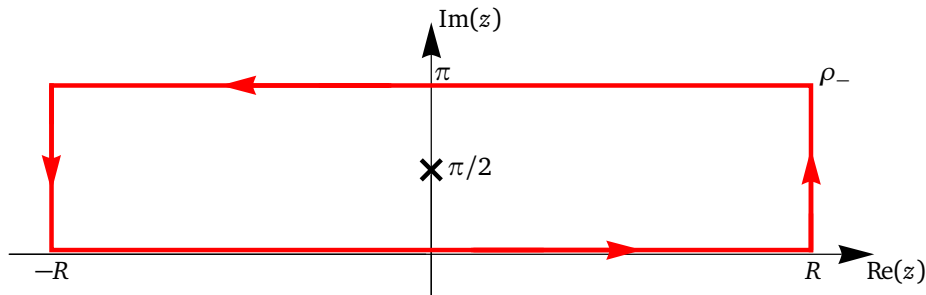
con

$$S_{\mp} = \frac{1}{4i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tanh(x)}{x(x \mp i\pi)} dx.$$

Per calcolare il primo integrale S_{-} , consideriamo il rettangolo, mostrato nella figura sottostante,

$$\rho_{-} = [-R, R] \cup [R, R + i\pi] \cup [R + i\pi, -R + i\pi] \cup [-R + i\pi, -R],$$

dove il simbolo $[z_1, z_2]$ indica il segmento di retta con estremi z_1 e z_2 orientato dal primo verso il secondo.



Il polo in $z = i\pi/2$ è indicato dal simbolo "x". La singolarità in $z = i\pi$ è invece eliminabile. Per calcolare l'integrale

$$S_{-} = \frac{1}{4i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tanh(x)}{x(x - i\pi)} dx,$$

consideriamo l'integrale sul rettangolo ρ_{-} ,

$$\sigma_{-} = \frac{1}{4i\pi} \oint_{\rho_{-}} \frac{\tanh(z)}{z(z - i\pi)} dz = \frac{1}{2} \operatorname{Res} \left[\frac{\tanh(z)}{z(z - i\pi)}, \frac{i\pi}{2} \right] = \frac{1}{2} \frac{\sinh(i\pi/2)}{(i\pi/2)(-i\pi/2)} \frac{1}{\sinh(i\pi/2)} = \frac{2}{\pi^2}.$$

Questo risultato non dipende da R , quindi vale anche nel limite

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sigma_{-} = \frac{2}{\pi^2}.$$

In termini dei singoli contributi si ha

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \sigma_{-} &= S_{-} + \frac{1}{4i\pi} \int_{\infty}^{-\infty} \frac{\tanh(x + i\pi)}{(x + i\pi)x} dx \\ &\quad + \lim_{R \rightarrow \infty} \left(i \int_0^{\pi} \frac{\tanh(R + iy)}{(R + iy)(R + iy - i\pi)} dy + i \int_{\pi}^0 \frac{\tanh(-R + iy)}{(-R + iy)(-R + iy - i\pi)} dy \right) \\ &= S_{-} - S_{+}, \end{aligned}$$

dove, abbiamo identificato con S_{-} e S_{+} , rispettivamente il primo e il secondo integrale, mentre per quelli sui tratti verticali, abbiamo usato la convergenza uniforme delle integrande

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\tanh(\pm R + iy)}{(\pm R + iy)(\pm R + iy - i\pi)} \stackrel{U}{=} 0,$$

su archi di raggio R centrati nell'origine e tali da non sottendere l'asse immaginario, per dedurne l'annullamento. Usando i due risultati, si ottiene la differenza

$$S_{-} - S_{+} = \frac{2}{\pi^2},$$

che rappresenta l'integrale cercato. In definitiva si ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tanh(x)}{x(x - i\pi)} dx = \frac{2}{\pi^2}.$$

TERZO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 5/30)

Si dimostri che i coefficienti della serie di Laurent della funzione gamma di Eulero $\Gamma(z)$ centrata nell'origine e convergente nella corona circolare $C_{0,1} = \{z : 0 < |z| < 1\}$, hanno la forma

$$C_k = \begin{cases} 0 & \text{con: } -k \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \\ 1 & \text{con: } k = -1 \\ \frac{1}{k!} \int_0^\infty e^{-t} \ln^k(t) dt & \text{con: } k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \end{cases} .$$

SOLUZIONE DEL TERZO PROBLEMA

Sfruttiamo l'equazione di ricorrenza

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

e la rappresentazione integrale

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^z dt ,$$

che converge in $\{z : \operatorname{Re}(z) > -1\}$. Consideriamo lo sviluppo di Laurent di questa funzione in $z = 0$, che è un punto di analiticità e quindi lo sviluppo è quello di Taylor. A tal fine riscriviamo la potenza t^z come

$$t^z = e^{z \ln(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k \ln^k(t)}{k!}$$

e la usiamo nella rappresentazione precedente

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= \int_0^\infty e^{-t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k \ln^k(t)}{k!} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \int_0^\infty e^{-t} \ln^k(t) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-t} dt + z \int_0^\infty e^{-t} \ln(t) dt + \frac{z^2}{2} \int_0^\infty e^{-t} \ln^2(t) dt + \frac{z^3}{3!} \int_0^\infty e^{-t} \ln^3(t) dt + \mathcal{O}(z^4) \\ &= 1 + z \int_0^\infty e^{-t} \ln(t) dt + \frac{z^2}{2} \int_0^\infty e^{-t} \ln^2(t) dt + \frac{z^3}{3!} \int_0^\infty e^{-t} \ln^3(t) dt + \mathcal{O}(z^4) . \end{aligned}$$

Il raggio di convergenza si ottiene come la distanza tra il centro della serie, l'origine, e la singolarità della funzione $\Gamma(z+1)$ più vicina all'origine, ovvero $z = -1$. Infatti, per $z \rightarrow 1$, si ha che l'argomento della funzione $\Gamma(z+1)$ tende a 0, punto in cui la stessa funzione ha un polo semplice. Quindi, il raggio di convergenza della precedente serie di Taylor è $r = |-1| = 1$, ovvero converge in ogni z tale che $|z| < 1$.

Per la funzione $\Gamma(z)$, che coincide con $\Gamma(z+1)/z$, si ha

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \frac{\Gamma(z+1)}{z} = \frac{1}{z} + \int_0^\infty e^{-t} \ln(t) dt + \frac{z}{2} \int_0^\infty e^{-t} \ln^2(t) dt + \frac{z^2}{3!} \int_0^\infty e^{-t} \ln^3(t) dt + \mathcal{O}(z^3) \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k-1}}{k!} \int_0^\infty e^{-t} \ln^k(t) dt . \end{aligned}$$

Poiché la serie originale convergeva nel disco unitario $\{z : |z| < 1\}$, la precedente converge nel disco unitario privato del centro, che è ora una singolarità, quindi converge nella corona circolare $C_{0,1} = \{z : 0 < |z| < 1\}$. Ancora dalla precedente, si deducono i valori dei coefficienti. Sono nulli quelli con indici minori o uguali a -2 , il coefficiente C_{-1} è unitario, gli altri con $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sono

$$C_k = \frac{1}{k!} \int_0^\infty e^{-t} \ln^k(t) dt .$$

QUARTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si dimostri che un operatore non hermitiano, che ha solo autovalori reali non è diagonalizzabile.

Si studi il caso l'operatore $\widehat{\mathbb{G}}$ definito nello spazio di Hilbert a due dimensione E_2 , che è rappresentato dalla matrice

$$\widehat{\mathbb{G}} \stackrel{e}{\leftrightarrow} \mathbb{G} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

rispetto alla base $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle\} \subset E_2$.

- È hermitiano?
- È diagonalizzabile?
- Qual è la matrice che rappresenta l'operatore aggiunto $\widehat{\mathbb{G}}^\dagger$ rispetto alla stessa base $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle\} \subset E_2$?

Curiosità. Il simbolo \mathbb{G} , usato per l'operatore e la relativa matrice, rappresenta lo *World Wide Web*, che è la locuzione inglese che sta a indicare la rete Internet globale. Quella dello *World Wide Web*, spesso indicato con *WWW*, non è propriamente un'invenzione, quanto il culmine di una lunga e vasta serie di piccoli e grandi avanzamenti tecnici, tecnologici e informatici. Ciononostante, il *WWW* ha una data di nascita: il 6 agosto 1991 e un padre: l'informatico inglese **Tim Berners-Lee**. Infatti, fu proprio durante quel martedì che Tim Berners-Lee rese pubblico e accessibile il primo *sito web* della storia. Dichiarò, inoltre, che non avrebbe mai brevettato la tecnologia alla base di questa innovazione, perché desiderava che chiunque, ovunque e comunque potesse farne uso liberamente.

SOLUZIONE DEL QUARTO PROBLEMA

Una delle tesi del teorema spettrale sancisce la possibilità di rappresentare gli operatori diagonalizzabili come combinazione di proiettori ortogonali, pesati con gli autovalori dell'operatore stesso. Ovvero, se \hat{S} è un operatore diagonalizzabile definito nello spazio di Hilbert E_N , a N dimensioni, e $\{\sigma_k\}_{k=1}^N \subset \mathbb{C}$ è l'insieme dei suoi N autovalori (non necessariamente tutti distinti), allora esiste un insieme di altrettanti proiettori ortogonali $\{\hat{P}_k\}_{k=1}^N$, la cui somma è l'operatore identità, tali che si abbia la rappresentazione spettrale

$$\hat{S} = \sum_{k=1}^N \sigma_k \hat{P}_k.$$

Alla luce di questo teorema, se un operatore \hat{T} , definito nello spazio di Hilbert E_M , a M dimensioni, avente solo autovalori reali, fosse diagonalizzabile, allora avrebbe rappresentazione spettrale

$$\hat{T} = \sum_{j=1}^M \tau_j \hat{Q}_j,$$

dove $\{\tau_j\}_{j=1}^M$ e $\{\hat{Q}_j\}_{j=1}^M$ sono, rispettivamente, l'insieme degli autovalori e quello dei proiettori ortogonali dell'operatore \hat{T} . Ne consegue che l'operatore aggiunto avrebbe la rappresentazione

$$\hat{T}^\dagger = \sum_{j=1}^M \tau_j^* \hat{Q}_j^\dagger = \sum_{j=1}^M \tau_j \hat{Q}_j = \hat{T},$$

quindi coinciderebbe con lo stesso operatore e sarebbe hermitiano. Si noti che la seconda identità segue dalle condizioni di realtà degli autovalori e di hermitianità dei proiettori. In definitiva, un operatore diagonalizzabile e avente solo autovalori reali è hermitiano, quindi un operatore che abbia solo autovalori reali e che sia, inoltre, non hermitiano, non può essere diagonalizzabile.

Consideriamo l'operatore $\widehat{\mathbb{G}}$ dato dal problema, gli autovalori si ottengono come soluzioni dell'equazione secolare

$$\begin{aligned} \det(\mathbb{G} - I\alpha) &= 0 \\ \det \begin{pmatrix} 1-\alpha & 1 \\ 0 & 2-\alpha \end{pmatrix} &= 0 \\ (1-\alpha)(2-\alpha) &= 0 \end{aligned}$$

e sono $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$. Gli autovettori corrispondenti sono rappresentati dai vettori a_1 e a_2 , le cui componenti contro-varianti sono le soluzioni dei due sistemi omogenei

$$\begin{pmatrix} 1-\alpha_j & 1 \\ 0 & 2-\alpha_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_j^1 \\ a_j^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2,$$

dove a_j^k , con $j, k \in \{1, 2\}$, è la k -esima componente contro-variante del vettore che rappresenta il j -esimo autovettore. Con $\alpha_1 = 1$ si ha

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

da cui, ponendo $a_1^1 = 1$, otteniamo $a_1^2 = 0$.
Con il secondo autovalore $\alpha_2 = 2$,

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dove poniamo $a_2^1 = 1/\sqrt{2}$ e otteniamo $a_2^2 = a_2^1 = 1/\sqrt{2}$. I vettori normalizzati sono

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

sono linearmente indipendenti, quindi l'operatore è diagonalizzabile, ha solo autovalori reali, è quindi hermitiano. Perché, allora, la matrice \mathbb{G} , che lo rappresenta, non coincide con la trasposta e complessa coniugata? Infatti,

$$\mathbb{G}^{T*} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \mathbb{G}.$$

In generale, la relazione che lega la matrice che rappresenta l'operatore aggiunto, che indichiamo con \mathbb{G}^\dagger , con quella che rappresenta, rispetto alla stessa base, l'operatore, che indichiamo semplicemente con \mathbb{G} , è

$$\mathbb{G}^\dagger = G^{-1} \mathbb{G}^{T*} G,$$

dove G è la matrice invertibile che ha per elementi i prodotti scalari dei vettori della base. Con la base data dal problema $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle\}$, si ha

$$G = \begin{pmatrix} \langle e_1|e_1\rangle & \langle e_1|e_2\rangle \\ \langle e_2|e_1\rangle & \langle e_2|e_2\rangle \end{pmatrix},$$

cioè l'elemento della j -esima riga e k -esima colonna è $G_k^j = \langle e_j|e_k\rangle$, con $j, k \in \{1, 2\}$. Possiamo definire la matrice G , imponendo l'hermitianità, ovvero richiedendo che la matrice \mathbb{G}^\dagger coincida con la matrice \mathbb{G} . Riscriviamo la relazione tra le matrici \mathbb{G} e \mathbb{G}^\dagger come

$$G \mathbb{G}^\dagger = \mathbb{G}^{T*} G \quad \Rightarrow \quad G \mathbb{G} = \mathbb{G}^{T*} G \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} G_1^1 & G_2^1 \\ G_1^2 & G_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_1^1 & G_2^1 \\ G_1^2 & G_2^2 \end{pmatrix},$$

poniamo $G_1^1 = 1$ e si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+2G_2^1 \\ G_1^2 & G_1^2+2G_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & G_2^1 \\ 1+2G_1^2 & G_1^2+2G_2^2 \end{pmatrix},$$

da cui: $G_2^1 = G_1^2 = -1$, mentre non si ha alcuna condizione su G_2^2 . Poiché G_2^2 è il prodotto scalare di un vettore, diverso dal vettore nullo, per se stesso, deve essere strettamente positivo. Inoltre, non può essere uguale a uno, perché, in questo caso, la matrice G non sarebbe invertibile. Scegliamo $G_2^2 = 2$, allora

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

la cui inversa è

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Verifichiamo che la matrice \mathbb{G}^\dagger , che rappresenta l'operatore aggiunto, è

$$\mathbb{G}^\dagger = G^{-1}A^{T*}G = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

coincide con la matrice che rappresenta l'operatore, che, quindi hermitiano.

QUINTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$\mathbb{D} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(\sin(\pi x))}{x^2 + 1} dx.$$

Curiosità. L'immagine \mathbb{D} , che indica l'integrale, è lo schema frontale del motore elettrico in corrente alternata inventato e costruito nel 1886 dall'ingegnere italiano **Galileo Ferraris**, che fu anche autore degli studi sui principi elettrodinamici su cui si basa il suo funzionamento. Galileo Ferraris scelse di non brevettare la sua idea, convinto dell'universalità dei risultati della scienza e quindi del fatto che dovessero essere liberi e accessibili a tutte e tutti. Pochi giorni dopo la pubblicazione delle sue scoperte, fu lo scienziato statunitense Nikola Tesla che, indipendentemente, depositò il brevetto negli Stati Uniti.

SOLUZIONE DEL QUINTO PROBLEMA

La distribuzione delta di Dirac che compare nella funzione integranda ha come argomento la funzione seno, che ha zeri semplici in corrispondenza dei numeri relativi, quindi nei punti dell'insieme $\{x_k = k\}_{k \in \mathbb{Z}}$. Vale, allora, l'identità formale

$$\delta(\sin(\pi x)) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\delta(x - x_k)}{|d\sin(\pi x)/dx|_{x=x_k}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\delta(x - x_k)}{\pi |\cos(\pi k)|} = \frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - k).$$

L'integrale diventa una serie numerica, infatti,

$$\mathbb{D} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\delta(x - k)}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2 + 1}.$$

Ne calcoliamo la somma con il metodo dei residui. Definiamo la funzione di lavoro

$$f(z) = \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} \frac{1}{z^2 + 1},$$

che ha poli semplici in corrispondenza dei numeri relativi, dovuti alla funzione seno a denominatore, e in $z_{\pm} = \pm i$, dovuti al polinomio di secondo grado $z^2 + 1$, anch'esso a denominatore. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, definiamo l'integrale

$$J_n \equiv \frac{1}{2i\pi} \oint_{|z|=n+1/2} f(z) dz = \sum_{k=-n}^n \text{Res}[f(z), k] + \text{Res}[f(z), -i] + \text{Res}[f(z), i].$$

Poiché nel limite $n \rightarrow \infty$ questo integrale tende a zero, si ha

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{Res}[f(z), k] = -\text{Res}[f(z), -i] - \text{Res}[f(z), i].$$

I residui valgono

$$\begin{aligned} \text{Res}[f(z), k] &= \frac{1}{\pi} \frac{1}{k^2 + 1}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \\ \text{Res}[f(z), \pm i] &= \pm \frac{\cos(\pm \pi i)}{\sin(\pm \pi i)} \frac{1}{2i} = -\frac{1 \cosh(\pi)}{2 \sinh(\pi)} = -\frac{\coth(\pi)}{2}. \end{aligned}$$

Ne consegue che l'identità precedente dà la somma della serie

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{Res}[f(z), k] = \frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2 + 1} = -\operatorname{Res}[f(z), -i] - \operatorname{Res}[f(z), i] = \frac{\coth(\pi)}{2} + \frac{\coth(\pi)}{2},$$

cioè

$$\frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2 + 1} = \coth(\pi),$$

che è il valore dell'integrale richiesto,

$$\diamond = \coth(\pi).$$

SESTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 5/30)

Facendo un uso sapiente del teorema della convoluzione, si ottenga l'espressione della funzione

$$\mathfrak{U}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_a(x-w)f_b(w)dw,$$

con

$$f_a(x) = e^{-ax^2}, \quad f_b(x) = e^{-bx^2}, \quad \forall a, b \in (0, \infty).$$

Curiosità. Il simbolo \mathfrak{U} , usato per la funzione del problema, rappresenta la struttura stilizzata della molecola dell'insulina. I tratti blu e rosso indicano le catene amminoacidiche della proteina matura, quelli arancione e verde sono i peptidi segnale. L'insulina fu scoperta e isolata nel 1921 dagli scienziati canadesi **Frederick Grant Banting**, **Charles Herbert Best** e **James Bertram Collip**. Dei tre, solo Frederick Grant Banting fu insignito con il premio Nobel per la Fisiologia e la Medicina con il suo collaboratore John James Rickard Macleod. Entrambi, però, decisero di condividere la propria metà con, rispettivamente, Charles Herbert Best e James Bertram Collip. I tre scienziati canadesi, brevettarono la loro scoperta, per poi vendere il brevetto all'Università di Toronto per la cifra simbolica di un dollaro canadese. Frederick Grant Banting spiegò la ragione di questo loro atto con la celebre frase: "l'insulina appartiene al mondo, non a me."

SOLUZIONE DEL SESTO PROBLEMA

Usiamo la tesi del teorema della convoluzione secondo cui, date due funzioni $f(x), g(x) \in L(\mathbb{R})$, quindi due funzioni sommabili in \mathbb{R} , la trasformata di Fourier della loro convoluzione coincide con $\sqrt{2\pi}$ -volte il prodotto delle trasformate di Fourier, cioè

$$\mathcal{F}_k[f * g] = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}_k[f] \mathcal{F}_k[g].$$

Inoltre, ci avvarremo della trasformata di Fourier nota della funzione Gaussiana, ovvero:

$$\mathcal{F}_k[e^{-cx^2}] = \frac{1}{\sqrt{2c}} e^{-\frac{k^2}{4c}}, \quad \forall c \in (0, \infty).$$

La funzione $\mathfrak{U}(x)$ è la convoluzione di due funzioni gaussiane e, usando il risultato precedente, si ha

$$\mathcal{F}_k[\mathfrak{U}] = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}_k[e^{-ax^2}] \mathcal{F}_k[e^{-bx^2}] = \sqrt{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{k^2}{4a}} \frac{1}{\sqrt{2b}} e^{-\frac{k^2}{4b}} = \sqrt{\frac{\pi}{2ab}} e^{-k^2 \frac{a+b}{4ab}}.$$

Questa trasformata di Fourier è ancora una funzione gaussiana, ne calcoliamo l'anti-trasformata di Fourier, sfruttando la forma nota, abbiamo

$$\mathfrak{U}(x) = \mathcal{F}_{-x} \left[\sqrt{\frac{\pi}{2ab}} e^{-k^2 \frac{a+b}{4ab}} \right] = \sqrt{\frac{\pi}{2ab}} \mathcal{F}_{-x} \left[e^{-k^2 \frac{a+b}{4ab}} \right] = \sqrt{\frac{\pi}{2ab}} \frac{1}{\sqrt{(a+b)/(2ab)}} e^{-x^2 ab/(a+b)},$$

da cui, semplificando il semplificabile, si ottiene

$$U(x) = \sqrt{\frac{\pi}{a+b}} e^{-x^2 ab/(a+b)}.$$