

METODI MATEMATICI PER LA FISICA

PROVA PARZIALE DEL 24 GIUGNO 2026

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che il punteggio assegnato a ciascuna procedura di risoluzione può variare tra lo zero e il massimo indicato ed è stabilito valutando:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo;
6. la bellezza e l'armonia del tutto.



PRIMO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 3/30)

Considerando la contrazione dei commutatori delle matrici di Pauli: σ_1, σ_2 e σ_3 ,

$$\sum_{l=1}^3 [\sigma_j, \sigma_l][\sigma_l, \sigma_k],$$

per ogni $(j, k) \in \{1, 2, 3\}^2$, si ottengono le espressioni delle contrazioni

$$\text{✌}_{jkt} = \sum_{l,m,n=1}^3 \varepsilon_{jlm} \varepsilon_{kln} \varepsilon_{tmn}, \quad \text{✋}_{jk} = \sum_{l,m=1}^3 \varepsilon_{jlm} \varepsilon_{klm}, \quad \forall (j, k, t) \in \{1, 2, 3\}^3.$$

Curiosità. I simboli  e  mostrano come posizionare le dita della mano destra per indicare le lettere "A" e "B" nella *lingua dei segni americana* (LSA). Lo scopo delle lingue dei segni esistenti o esistenti è quello di sopperire all'impossibilità di comunicare, usando il canale vocale e l'acustico. A tal fine, si definisce una serie di gesti da compiere con le dita e le mani, a volte accompagnati da un'opportuna mimica facciale, per significare tanto singole lettere, come in questo caso, quanto: parole, concetti, sentimenti e stati d'animo. Ci sono testimonianze di tecniche di comunicazione visiva risalenti al periodo precedente alla stessa codificazione della scrittura. La prima descrizione schematica di una lingua dei segni risale alla seconda metà del XVIII secolo. Ne fu autore l'abate Charles-Michel de l'Épée, fondatore della scuola di Parigi dei sordi, denominata: *Institut national des jeunes sourds*.

SOLUZIONE DEL PRIMO PROBLEMA

Per ogni $(j, k) \in \{1, 2, 3\}^2$, scriviamo il prodotto dei commutatori, prima sviluppando gli stessi nelle differenze dei prodotti delle matrici, poi usando l'algebra delle stesse matrici di Pauli e scriviamo i due risultati come combinazioni delle matrici di Pauli e della matrice identità 2×2 . Nel primo caso si ha

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^3 [\sigma_j, \sigma_l][\sigma_l, \sigma_k] &= \sum_{l=1}^3 (\sigma_j \sigma_l - \sigma_l \sigma_j)(\sigma_l \sigma_k - \sigma_k \sigma_l) = \sum_{l=1}^3 (\sigma_j \underbrace{\sigma_l \sigma_l}_{=I} \sigma_k - \sigma_j \sigma_l \sigma_k \sigma_l - \sigma_l \sigma_j \sigma_l \sigma_k + \sigma_l \sigma_j \sigma_k \sigma_l) \\ &= 3\sigma_j \sigma_k + \sum_{l=1}^3 \left[-\sigma_j (-\sigma_k \sigma_l + 2I \delta_{kl}) \sigma_l - \sigma_l (-\sigma_l \sigma_j + 2I \delta_{jl}) \sigma_k \right. \\ &\quad \left. + (-\sigma_j \sigma_l + 2I \delta_{jl})(-\sigma_l \sigma_k + 2I \delta_{kl}) \right] \\ &= 3\sigma_j \sigma_k + 3\sigma_j \sigma_k - 2\sigma_j \sigma_k + 3\sigma_j \sigma_k - 2\sigma_j \sigma_k + 3\sigma_j \sigma_k - 2\sigma_j \sigma_k - 2\sigma_j \sigma_k + 4I \delta_{jk} = 4\sigma_j \sigma_k + 4I \delta_{jk} \\ &= 4 \left(\sum_{t=1}^3 i \varepsilon_{jkt} \sigma_t + I \delta_{jk} \right) + 4I \delta_{jk} = 4i \sum_{t=1}^3 \varepsilon_{jkt} \sigma_t + 8I \delta_{jk}, \end{aligned}$$

nel secondo,

$$\begin{aligned}
 \sum_{l=1}^3 [\sigma_j, \sigma_l][\sigma_l, \sigma_k] &= -4 \sum_{l,m,n=1}^3 \varepsilon_{jlm} \varepsilon_{lkn} \sigma_m \sigma_n = -4 \sum_{l,m,n=1}^3 \varepsilon_{jlm} \varepsilon_{lkn} \left(i \sum_{s=1}^3 \varepsilon_{mns} \sigma_s + I \delta_{mn} \right) \\
 &= \sum_{s=1}^3 (-4i) \sum_{l,m,n=1}^3 \varepsilon_{jlm} \varepsilon_{lkn} \varepsilon_{mns} \sigma_s - 4I \sum_{l,m,n=1}^3 \varepsilon_{jlm} \varepsilon_{lkn} \delta_{mn} \\
 &= \sum_{s=1}^3 4i \sum_{l,m,n=1}^3 \varepsilon_{jlm} \varepsilon_{kln} \varepsilon_{smn} \sigma_s - 4I \sum_{l,m=1}^3 \varepsilon_{jlm} \varepsilon_{lkm} \\
 &= \sum_{s=1}^3 4i \sum_{l,m,n=1}^3 \varepsilon_{jlm} \varepsilon_{kln} \varepsilon_{smn} \sigma_s + 4I \sum_{l,m=1}^3 \varepsilon_{jlm} \varepsilon_{klm},
 \end{aligned}$$

dove abbiamo sfruttato più volte l'anti-simmetria del simbolo di Levi-Civita ε_{lmn} rispetto allo scambio di posizione di indici adiacenti, l'anti-commutazione delle matrici di Pauli è l'espressione del prodotto di due generiche matrici di Pauli

$$\sigma_j \sigma_k = i \sum_{t=1}^3 \varepsilon_{jkt} \sigma_t + I \delta_{jk}, \quad \forall (j, k) \in \{1, 2, 3\}^2.$$

Poiché l'insieme delle tre matrici di Pauli e la matrice identità è una base dello spazio delle matrici 2×2 a elementi complessi, le due espressioni della stessa matrice, essendo come combinazioni delle matrici della stessa base, devono avere i coefficienti omologhi coincidenti, quindi si hanno le contrazioni

$$\sum_{l,m,n=1}^3 \varepsilon_{jlm} \varepsilon_{kln} \varepsilon_{tmn} = \varepsilon_{jkt}, \quad \sum_{l,m=1}^3 \varepsilon_{jlm} \varepsilon_{klm} = 2\delta_{jk}, \quad \forall (j, k, t) \in \{1, 2, 3\}^3.$$

Ne consegue che le contrazioni cercate sono

$$\begin{aligned}
 \text{✌}_{jkt} &= \varepsilon_{jkt}, & \text{✋}_{jk} &= \delta_{jk}, & \forall (j, k, t) &\in \{1, 2, 3\}^3.
 \end{aligned}$$

SECONDO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 3/30)

L'operatore \hat{f} è definito nello spazio di Hilbert a otto dimensioni K_8 e, rispetto alla base ortonormale $\{|f_k\rangle\}_{k=1}^8$ dello stesso spazio, è rappresentato dalla matrice omonima \hat{f} , con

$$\hat{f} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sigma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3\sigma_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

dove la matrice 8×8 \hat{f} è espressa in notazione a blocchi in termini delle tre matrici di Pauli: σ_1 , σ_2 e σ_3 .

Si determinino gli autovalori dell'operatore \hat{f} e le rappresentazioni degli autovettori corrispondenti, rispetto alla base data.

Curiosità. Il simbolo ✋ mostra come posizionare le dita della mano destra per indicare la lettera "E" nella *lingua dei segni americana*.

SOLUZIONE DEL SECONDO PROBLEMA

Poiché la rappresentazione a blocchi è diagonale, sapendo che gli autovalori delle matrici di Pauli sono i numeri -1 e 1 , quindi gli autovalori dell'operatore sono gli elementi dell'insieme $\sigma_d = \{-4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\}$. Gli autovalori

-4 e 4 sono dovuti a blocchi 1×1 , quindi ai singoli elementi nelle posizioni $(1, 1)$ e $(8, 8)$; le coppie $-j$ e j , con $j = 1, 2, 3$, si ottengono invece dai blocchi diagonali $j\sigma_j$. Infatti, l'equazione secolare è

$$\det \left(\begin{array}{c} \text{lightbulb} \\ -\epsilon I \end{array} \right) = 0$$

$$\begin{pmatrix} -4-\epsilon & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\epsilon & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\epsilon & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\epsilon & -2i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2i & -\epsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3-\epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3-\epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4-\epsilon \end{pmatrix} = 0$$

$$(-4-\epsilon)(\epsilon^2-1)(\epsilon^2-4)(3-\epsilon)(-3-\epsilon)(4-\epsilon) = 0,$$

le soluzioni, ovvero gli autovalori, sono gli elementi dell'insieme σ_d , definito in precedenza.

Le componenti dei vettori che rappresentano gli autovettori possono essere calcolate usando la notazione a blocchi. Indicando con v_j il vettore 8×1 che verifica l'equazione agli autovalori

$$\begin{array}{c} \text{lightbulb} \\ v_j \end{array} = j v_j, \quad j \in \{-4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\},$$

si hanno

$$v_j = \begin{pmatrix} v_j^1 \\ v_j^2 \\ \vdots \\ v_j^8 \end{pmatrix},$$

per i tre blocchi 2×2 ,

$$\sigma_1 \begin{pmatrix} v_{\pm 1}^2 \\ v_{\pm 1}^3 \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} v_{\pm 1}^2 \\ v_{\pm 1}^3 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 \begin{pmatrix} v_{\pm 2}^4 \\ v_{\pm 2}^5 \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} v_{\pm 2}^4 \\ v_{\pm 2}^5 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 \begin{pmatrix} v_{\pm 3}^6 \\ v_{\pm 3}^7 \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} v_{\pm 3}^6 \\ v_{\pm 3}^7 \end{pmatrix}.$$

I vettori completi sono:

$$v_{-4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_{+4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_{\pm 1} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_{\pm 1}^2 \\ v_{\pm 1}^3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_{\pm 2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ v_{\pm 2}^4 \\ v_{\pm 2}^5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_{\pm 3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ v_{\pm 3}^6 \\ v_{\pm 3}^7 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Dall'equazione agli autovalori, della matrice σ_3 , essendo la matrice diagonale,

$$\begin{pmatrix} v_{\pm 3}^6 \\ v_{\pm 3}^7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} v_{\mp 3}^6 \\ v_{\mp 3}^7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Per la prima matrice di Pauli si ha

$$\begin{pmatrix} \mp 1 & 1 \\ 1 & \mp 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{\pm 1}^2 \\ v_{\pm 1}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

posto $v_{\pm 1}^2 = v$, si hanno: $v_{\pm 1}^3 = \pm v$, quindi normalizzando,

$$v_{\pm 1}^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad v_{\pm 1}^3 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Per la seconda matrice di Pauli si ha

$$\begin{pmatrix} \mp 1 & -i \\ i & \mp 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{\pm 2}^4 \\ v_{\pm 2}^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

anche in questo caso poniamo $v_{\pm 2}^4 = v$, si hanno: $v_{\pm 2}^5 = \pm iv$, quindi normalizzando,

$$v_{\pm 2}^4 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad v_{\pm 2}^5 = \pm \frac{i}{\sqrt{2}}.$$

In definitiva le rappresentazioni degli otto autovettori sono

$$v_{-4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_{+4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_{\pm 1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \pm 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_{\pm 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \pm i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_{-3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_{+3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

TERZO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 3/30)

Si ottenga l'espressione analitica della funzione $\mathbb{F}(x)$ soluzione dell'equazione integrale

$$\mathbb{F}(x) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-y)\mathbb{F}(y)}{(x^2+y^2-2xy+1)^2} dy + \text{sen}(ax),$$

con $a, \lambda \in \mathbb{R}$.

Curiosità. Il simbolo \mathbb{F} mostra come disporre le dita della mano destra per indicare la lettera "F" nella *lingua dei segni americana*.

SOLUZIONE DEL TERZO PROBLEMA

L'integrale è una convoluzione, infatti lo si può riscrivere come

$$\mathbb{F}(x) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-y)\mathbb{F}(y)}{((x-y)^2+1)^2} dy + \text{sen}(ax) = -\frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dg}{dx}(x-y)\mathbb{F}(y) dy + \text{sen}(ax),$$

dove la funzione $g(x)$ è la funzione Lorentziana

$$g(x) = \frac{1}{x^2+1}.$$

Facendo la trasformata di Fourier di ambo i membri e usando il teorema della convoluzione e la formula della trasformata di Fourier della derivata prima, si ha

$$\tilde{\mathbb{F}}(k) = -\sqrt{2\pi} \frac{\lambda}{2} \mathcal{F}_k \left[\frac{d}{dx} \frac{1}{x^2+1} \right] \tilde{\mathbb{F}}(k) + \mathcal{F}_k [\text{sen}(ax)] = -\sqrt{2\pi} \frac{\lambda ik}{2} \mathcal{F}_k \left[\frac{1}{x^2+1} \right] \tilde{\mathbb{F}}(k) + \mathcal{F}_k [\text{sen}(ax)].$$

Le trasformate di Fourier della funzione Lorentziana e della funzione seno, che rappresenta la funzione termine noto, sono note, si hanno

$$\mathcal{F}_k \left[\frac{1}{x^2+1} \right] = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|k|}, \quad \mathcal{F}_k [\text{sen}(ax)] = i\sqrt{\frac{\pi}{2}} (\delta(a+k) - \delta(a-k)).$$

Usando questi risultati, si ottiene un'equazione algebrica per la trasformata di Fourier della funzione soluzione,

$$\tilde{\mathbb{F}}(k) = -\frac{ik}{2} \pi \lambda e^{-|k|} \tilde{\mathbb{F}}(k) + i\sqrt{\frac{\pi}{2}} (\delta(a+k) - \delta(a-k)),$$

da cui

$$\widehat{W}(k) = i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\delta(a+k) - \delta(a-k)}{1 + i\pi\lambda k e^{-|k|/2}}.$$

L'anti-trasformata di Fourier dà

$$\begin{aligned} \widehat{W}(x) &= \mathcal{F}_{-x} \left[\widehat{W}(k) \right] = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(a+k) - \delta(a-k)}{1 + i\pi\lambda k e^{-|k|/2}} e^{ikx} dk \\ &= \frac{i}{2} \left(\frac{e^{-iax}}{1 - i\pi\lambda a e^{-|a|/2}} - \frac{e^{iax}}{1 + i\pi\lambda a e^{-|a|/2}} \right) = \operatorname{Im} \left(\frac{e^{iax}}{1 + i\pi\lambda a e^{-|a|/2}} \right) \\ &= \frac{-\cos(ax)\pi\lambda a e^{-|a|/2} + \operatorname{sen}(ax)}{1 + \pi^2\lambda^2 a^2 e^{-2|a|/4}}, \end{aligned}$$

da cui la soluzione

$$\widehat{W}(x) = 2 \frac{2\operatorname{sen}(ax) - \cos(ax)\pi\lambda a e^{-|a|}}{4 + \pi^2\lambda^2 a^2 e^{-2|a|}}.$$

La condizione di esistenza rispetto ai parametri reali λ e a si ottiene richiedendo l'assenza di singolarità, ovvero l'assenza di zeri della funzione dei due parametri a denominatore della $\widehat{W}(x)$. Avremmo zeri per valori di λ e a tali che:

$$4 + \pi^2\lambda^2 a^2 e^{-2|a|} = 0 \quad \Rightarrow \quad 4e^{2|a|} = -(\pi\lambda a)^2.$$

L'esponenziale a primo membro è strettamente positivo, $\forall a \in \mathbb{R}$, mentre la quantità a secondo membro, $\forall (\lambda, a) \in \mathbb{R}^2$, è minore di o uguale a zero, ne consegue che non si hanno singolarità e che tutti i valori reali dei due parametri danno soluzioni.

QUARTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 3/30)

Si dimostri che un operatore non hermitiano, che ha solo autovalori reali non è diagonalizzabile.

Si studi il caso l'operatore \widehat{W} definito nello spazio di Hilbert a due dimensione E_2 , che è rappresentato dalla matrice

$$\widehat{W} \leftrightarrow W = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

rispetto alla base $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle\} \subset E_2$.

- È hermitiano?
- È diagonalizzabile?
- Qual è la matrice che rappresenta l'operatore aggiunto \widehat{W}^\dagger rispetto alla stessa base $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle\} \subset E_2$?

Curiosità. Il simbolo \widehat{W} mostra come disporre le dita della mano destra per indicare la lettera "W" nella *lingua dei segni americana*.

SOLUZIONE DEL QUARTO PROBLEMA

Una delle tesi del teorema spettrale sancisce la possibilità di rappresentare gli operatori diagonalizzabili come combinazione di proiettori ortogonali, pesati con gli autovalori dell'operatore stesso. Ovvero, se \hat{S} è un operatore diagonalizzabile definito nello spazio di Hilbert E_N , a N dimensioni, e $\{\sigma_k\}_{k=1}^N \subset \mathbb{C}$ è l'insieme dei suoi N autovalori (non necessariamente tutti distinti), allora esiste un insieme di altrettanti proiettori ortogonali $\{\hat{P}_k\}_{k=1}^N$, la cui somma è l'operatore identità, tali che si ha la rappresentazione spettrale

$$\hat{S} = \sum_{k=1}^N \sigma_k \hat{P}_k.$$

Alla luce di questo teorema, se un operatore \hat{T} , definito nello spazio di Hilbert E_M , a M dimensioni, avente solo autovalori reali, fosse diagonalizzabile, allora avrebbe rappresentazioni spettrale

$$\hat{T} = \sum_{j=1}^M \tau_j \hat{Q}_j,$$

dove $\{\tau_j\}_{j=1}^M$ e $\{\hat{Q}_j\}_{j=1}^M$ sono, rispettivamente, l'insieme degli autovalori e quello dei proiettori ortogonali dell'operatore \hat{T} . Ne consegue che l'operatore aggiunto avrebbe la rappresentazione

$$\hat{T}^\dagger = \sum_{j=1}^M \eta_j^* \hat{Q}_j^\dagger = \sum_{j=1}^M \eta_j \hat{Q}_j = \hat{T},$$

quindi coinciderebbe con lo stesso operatore e sarebbe hermitiano. Si noti che la seconda identità segue dalle condizioni di realtà degli autovalori e di hermitianità dei proiettori. In definitiva, un operatore diagonalizzabile e avente solo autovalori reali è hermitiano, quindi un operatore che abbia solo autovalori reali e che sia, inoltre, non hermitiano, non può essere diagonalizzabile.

Consideriamo l'operatore \hat{G} dato dal problema, gli autovalori si ottengono come soluzioni dell'equazione secolare

$$\begin{aligned} \det(\hat{G} - I\alpha) &= 0 \\ \det \begin{pmatrix} 1-\alpha & 1 \\ 0 & 2-\alpha \end{pmatrix} &= 0 \\ (1-\alpha)(2-\alpha) &= 0, \end{aligned}$$

e sono $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$. Gli autovettori corrispondenti sono rappresentati dai vettori a_1 e a_2 , le cui componenti contro-varianti sono le soluzioni dei due sistemi omogenei

$$\begin{pmatrix} 1-\alpha_j & 1 \\ 0 & 2-\alpha_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_j^1 \\ a_j^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2,$$

dove a_j^k , con $j, k \in \{1, 2\}$, è la k -esima componente contro-variante del vettore che rappresenta il j -esimo autovettore. Con $\alpha_1 = 1$ si ha

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

da cui poniamo $a_1^1 = 1$ e otteniamo $a_1^2 = 0$.
Con il secondo autovalore $\alpha_2 = 2$,

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dove poniamo $a_2^1 = 1$ e otteniamo $a_2^2 = a_2^1 = 1$. I vettori normalizzati sono

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

sono linearmente indipendenti, quindi l'operatore è diagonalizzabile, ha solo autovalori reali, è quindi hermitiano.

Perché, allora, la matrice \hat{G} , che lo rappresenta, non coincide con la trasposta e complessa coniugata? Infatti,

$$\hat{G}^{T*} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \hat{G}.$$

In generale, la relazione che lega la matrice che rappresenta l'operatore aggiunto, che indichiamo con \hat{G}^\dagger , con quella che rappresenta, rispetto alla stessa base, l'operatore, che indichiamo semplicemente con \hat{G} , è

$$\hat{G}^\dagger = G^{-1} \hat{G}^{T*} G,$$

dove G è la matrice invertibile che ha per elementi i prodotti scalari dei vettori della base. Con la base data dal problema $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle\}$, si ha

$$G = \begin{pmatrix} \langle e_1|e_1\rangle & \langle e_1|e_2\rangle \\ \langle e_2|e_1\rangle & \langle e_2|e_2\rangle \end{pmatrix},$$

cioè l'elemento della j -esima riga e k -esima colonna è $G_k^j = \langle e_j|e_k\rangle$, con $j, k \in \{1, 2\}$. Possiamo definire la matrice G , imponendo l'hermitianità, ovvero richiedendo che la matrice ✌^\dagger coincida con la matrice ✌ . Riscriviamo la relazione tra le matrici ✌^\dagger e ✌ come

$$G \text{✌}^\dagger = \text{✌}^{T*} G \Rightarrow G \text{✌} = \text{✌}^{T*} G \Rightarrow \begin{pmatrix} G_1^1 & G_2^1 \\ G_1^2 & G_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_1^1 & G_2^1 \\ G_1^2 & G_2^2 \end{pmatrix},$$

poniamo $G_1^1 = 1$ e si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 + 2G_2^1 \\ G_1^2 & G_1^2 + 2G_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & G_2^1 \\ 1 + 2G_1^2 & G_2^1 + 2G_2^2 \end{pmatrix},$$

da cui: $G_2^1 = G_1^2 = -1$, mentre non si ha alcuna condizione su G_2^2 . Poiché G_2^2 è il prodotto scalare di un vettore, diverso dal vettore nullo, per se stesso, deve essere strettamente positivo. Inoltre, non può essere uguale a uno, perché, in questo caso, la matrice G non sarebbe invertibile. Scegliamo $G_2^2 = 2$, allora

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

la cui inversa è

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Verifichiamo che la matrice ✌^\dagger , che rappresenta l'operatore aggiunto, è

$$\text{✌}^\dagger = G^{-1} A^{T*} G = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

coincide con la matrice che rappresenta l'operatore, che, quindi hermitiano.

QUINTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 3/30)

Si calcoli l'integrale

$$\text{✌} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(\sin(\pi x))}{x^2 + 1} dx.$$

Curiosità. Il simbolo ✌ mostra come posizionare le dita della mano destra per indicare la lettera "U" nella *lingua dei segni americana*.

SOLUZIONE DEL QUINTO PROBLEMA

Si ha distribuzione delta di Dirac che ha come argomento la funzione seno che ha zeri semplici in corrispondenza dei numeri relativi, quindi nei punti dell'insieme $\{x_k = k\}_{k \in \mathbb{Z}}$. Vale l'identità formale

$$\delta(\sin(\pi x)) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\delta(x - x_k)}{|d\sin(\pi x)/dx|_{x=x_k}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\delta(x - x_k)}{\pi |\cos(\pi k)|} = \frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - k).$$

L'integrale diventa una serie numerica, cioè

$$\text{✌} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\delta(x - k)}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2 + 1}.$$

Ne calcoliamo la somma con il metodo dei residui. Definiamo la funzione di lavoro

$$f(z) = \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} \frac{1}{z^2 + 1}$$

che ha poli semplici in corrispondenza dei numeri relativi, dovuti alla funzione seno a denominatore, e in $z_{\pm} = \pm i$, dovuti al polinomi di secondo grado $z^2 + 1$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, definiamo l'integrale

$$J_n \equiv \frac{1}{2i\pi} \oint_{|z|=n+1/2} f(z) dz = \sum_{k=-n}^n \text{Res}[f(z), k] + \text{Res}[f(z), -i] + \text{Res}[f(z), i].$$

Poiché nel limite $n \rightarrow \infty$ questi integrali tendono a zero, si ha

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{Res}[f(z), k] = -\text{Res}[f(z), -i] - \text{Res}[f(z), i].$$

I residui valgono

$$\begin{aligned} \text{Res}[f(z), k] &= \frac{1}{\pi} \frac{1}{k^2 + 1} \\ \text{Res}[f(z), \pm i] &= \pm \frac{\cos(\pm \pi i)}{\sin(\pm \pi i)} \frac{1}{2i} = -\frac{1 \cosh(\pi)}{2 \sinh(\pi)} = -\frac{\coth(\pi)}{2}, \end{aligned}$$

l'identità precedente dà la somma della serie

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{Res}[f(z), k] = \frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2 + 1} = -\text{Res}[f(z), -i] - \text{Res}[f(z), i] = \frac{\coth(\pi)}{2} + \frac{\coth(\pi)}{2},$$

cioè

$$\frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2 + 1} = \coth(\pi),$$

che è quindi il valore dell'integrale richiesto

$$\text{☞} = \coth(\pi).$$

SESTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 3/30)

Facendo un uso sapiente del teorema della convoluzione, si ottenga l'espressione della funzione

$$\text{☞}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_a(x-w)f_b(w)dw,$$

con

$$f_a(x) = e^{-ax^2}, \quad f_b(x) = e^{-bx^2}, \quad \forall a, b \in (0, \infty).$$

Curiosità. Il simbolo ☞ mostra come posizionare le dita della mano destra per indicare la lettera "G" nella *lingua dei segni americana*.

SOLUZIONE DEL SESTO PROBLEMA

Usiamo la tesi del teorema della convoluzione secondo cui, date due funzioni $f(x), g(x) \in L(\mathbb{R})$, quindi due funzioni sommabili in \mathbb{R} , la trasformata di Fourier della loro convoluzione coincide con $\sqrt{2\pi}$ -volte il prodotto delle trasformate di Fourier, cioè

$$\mathcal{F}_k[f * g] = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}_k[f] \mathcal{F}_k[g].$$

Inoltre, ci avvarremo della trasformata di Fourier nota della funzione Gaussiana, ovvero:

$$\mathcal{F}_k [e^{-cx^2}] = \frac{1}{\sqrt{2c}} e^{-\frac{k^2}{4c}}, \quad \forall c \in (0, \infty).$$

La funzione $\mathcal{F}_k^{-1}(x)$ è la convoluzione di due funzioni gaussiane e, usando il risultato precedente, si ha

$$\mathcal{F}_k [\mathcal{F}_k^{-1}(x)] = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}_k [e^{-ax^2}] \mathcal{F}_k [e^{-bx^2}] = \sqrt{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{k^2}{4a}} \frac{1}{\sqrt{2b}} e^{-\frac{k^2}{4b}} = \sqrt{\frac{\pi}{2ab}} e^{-k^2 \frac{a+b}{4ab}}.$$

Questa trasformata di Fourier è ancora una funzione gaussiana, ne calcoliamo l'anti-trasformata di Fourier, sfruttando la forma nota, abbiamo

$$\mathcal{F}_k^{-1}(x) = \mathcal{F}_{-x} \left[\sqrt{\frac{\pi}{2ab}} e^{-k^2 \frac{a+b}{4ab}} \right] = \sqrt{\frac{\pi}{2ab}} \mathcal{F}_{-x} \left[e^{-k^2 \frac{a+b}{4ab}} \right] = \sqrt{\frac{\pi}{2ab}} \frac{1}{\sqrt{(a+b)/(2ab)}} e^{-x^2 ab/(a+b)},$$

da cui, semplificando il semplificabile, si ottiene

$$\mathcal{F}_k^{-1}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{a+b}} e^{-x^2 ab/(a+b)}.$$