Metodi Matematici per la Fisica

Prova scritta - 23 febbraio 2016

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi.

Primo problema (punteggio: 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$M = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} .$$

Soluzione del primo problema

L'integranda è pari, quindi possiamo "simmetrizzare" l'intervallo di integrazione come

$$M = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} .$$

La funzione integranda, estesa al piano complesso, ha due poli semplici in $z = \pm i$. Inoltre, definendo le fasi per le due funzioni, il cui prodotto rappresenta l'argomento della radice quadrata a denominatore, come

$$1 \pm z = |1 \pm z| e^{i\theta_{1,2}} , \qquad \begin{array}{l} \theta_1 \in (0, 2\pi) \\ \theta_2 \in (-\pi, \pi) \end{array} .$$

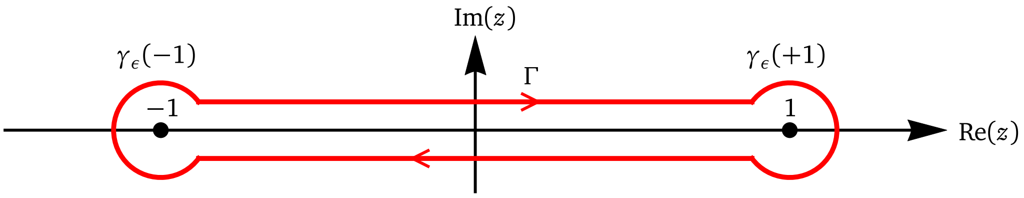
si una discontinuità di tipo tagli lungo il segmento $[0,1]$. In particolare, sopra il taglio, con $z = x + i\epsilon$, $x \in [0,1]$ e $\epsilon \to 0^+$, avremo

$$\sqrt{1-z^2}^{\,+} = \sqrt{1-x^2}\, e^{i(\theta_1^+ + \theta_2^+)/2} \sqrt{1-x^2}\, e^{i(0+0)/2} = \sqrt{1-x^2} ,$$

mentre sotto, per $z = x - i\epsilon$, si ha invece

$$\sqrt{1-z^2}^{\,-} = \sqrt{1-x^2}\, e^{i(\theta_1^- + \theta_2^-)/2} \sqrt{1-x^2}\, e^{i(2\pi+0)/2} = -\sqrt{1-x^2} .$$

L'apice $+$ $(-)$ indica il valore limite sul bordo superiore (inferiore) del taglio.



Considerando il percorso di integrazione chiuso, Γ, mostrato in figura, che avvolge il taglio, si ha, per il teorema dei residui,

$$\oint_\Gamma \frac{dz}{(1+z^2)\sqrt{1-z^2}} = \oint_\Gamma f(z) dz = 2i\pi \left(\text{Res}\left[f(z), i\right] + \text{Res}\left[f(z), -i\right] \right) .$$

Ne consegue che l'integrale su Γ nel limite $\epsilon \to 0$ è

$$\begin{aligned}\oint_\Gamma \frac{dz}{(1+z^2)\sqrt{1-z^2}} &= 2\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} - \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\gamma_\epsilon(-1)} \frac{dz}{(1+z^2)\sqrt{1-z^2}} - \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\gamma_\epsilon(+1)} \frac{dz}{(1+z^2)\sqrt{1-z^2}} \\ &= 4M\,.\end{aligned}$$

I contributi sugli archi infinitesimi $\gamma_\epsilon(\pm 1)$ sono nulli in quanto su di essi si hanno i limiti uniformi

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{z\mp 1}{(1+z^2)\sqrt{1-z^2}} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\mp\sqrt{1\mp z}}{1+z^2} = 0\,.$$

Per calcolare i residui dobbiamo valutare la radice quadrata nei punti $z = \pm i$ usando correttamente la definizione delle fasi. In particolare, per $z = i$ si ha

$$\left.\sqrt{1-z^2}\right|_{z=i} = \sqrt{(1-i)(1+i)} = \sqrt{2}\, e^{i(-\pi/4+\pi/4)/2} = \sqrt{2}\,,$$

infatti il primo fattore è scritto come $(1-i) = e^{-i\pi/4}/\sqrt{2}$, la fase non è $7i\pi/4$ in quanto θ_2 varia in $(-\pi,\pi)$.
Il valore della radice quadrata in $z = -i$ è

$$\left.\sqrt{1-z^2}\right|_{z=-i} = \sqrt{(1+i)(1-i)} = \sqrt{2}\, e^{i(\pi/4+7\pi/4)/2} = -\sqrt{2}\,,$$

in questo caso la scelta della fase è importante per il secondo fattore, ovvero $(1-i) = e^{7i\pi/4}/\sqrt{2}$, si deve usare la fase $7i\pi/4$ anziché $-i\pi/4$, poiché la determinazione scelta per θ_1 è $(0,2\pi)$.
Alla luce di questi risultati, i residui sono

$$\text{Res}\left[f(z),\pm i\right] = \frac{1}{\pm 2i\, \left.\sqrt{1-z^2}\right|_{z=\pm i}} = \frac{1}{2i\sqrt{2}}\,.$$

In definitiva, il valore dell'integrale è

$$M = \frac{1}{4}\oint_\Gamma \frac{dz}{(1+z^2)\sqrt{1-z^2}} = \frac{i\pi}{2}\left(\text{Res}\left[f(z),i\right] + \text{Res}\left[f(z),-i\right]\right) = \frac{i\pi}{2}\,\frac{1}{i\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\,.$$

Secondo problema (punteggio 6/30)

Si calcoli l'integrale in valore principale

$$P = \Pr\int_{-2}^{2} \frac{dx}{(x^2+2x-3)\,\sqrt{4-x^2}}\,.$$

Soluzione del secondo problema

La funzione integranda ha due poli semplici in

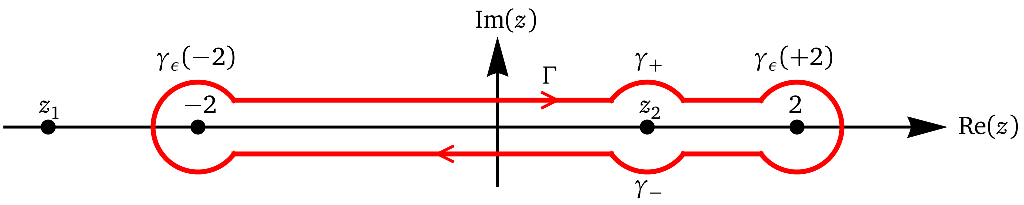
$$z_1 = -3\,, \qquad z_2 = 1\,,$$

in particolare z_2 appartiene all'intervallo d'integrazione. Si ha inoltre una discontinuità di tipo taglio lungo il segmento $[-2,2]$, che si ottiene scegliendo le determinazioni

$$2\pm z = |2\pm z| e^{i\theta_{1,2}}\,, \qquad \begin{array}{l}\theta_1 \in (0,2\pi)\\ \theta_2 \in (-\pi,\pi)\end{array}\,,$$

per le due funzioni il cui prodotto rappresenta l'argomento della radice quadrata a denominatore dell'integranda. Sopra e sotto il taglio, ovvero per $z = x \pm i\epsilon$, con $x \in [-2,2]$ e $\epsilon \to 0^+$, avremo rispettivamente

$$\begin{aligned}
\sqrt{4-z^2}^{\,+} &= \sqrt{4-x^2}\, e^{i(\theta_1^+ + \theta_2^+)/2} \sqrt{4-x^2}\, e^{i(0+0)/2} = \sqrt{4-x^2}\,, \\
\sqrt{4-z^2}^{\,-} &= \sqrt{4-x^2}\, e^{i(\theta_1^- + \theta_2^-)/2} \sqrt{4-x^2}\, e^{i(2\pi+0)/2} = -\sqrt{4-x^2}\,.
\end{aligned}$$



Consideriamo il percorso di integrazione chiuso Γ, mostrato in figura, che avvolge il segmento $[-2,2]$. L'integrale su tale può essere scritto come la somma di sei contributi; i due sui tratti rettilinei, nel limite $\epsilon \to 0^+$, rappresentano ciascuno il valore principale, si ha cioè

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to 0^+} \oint_\Gamma \frac{dz}{(z^2+2z-3)\sqrt{4-z^2}} = 2\,\mathrm{Pr}\!\int_{-2}^{2} &\frac{dx}{(z^2+2z-3)\sqrt{4-x^2}} \\
&- \lim_{\epsilon\to 0^+}\left[\int_{\gamma_+} \frac{dz}{(z-z_1)(z-z_2)\sqrt{4-z^2}} + \int_{\gamma_-} \frac{dz}{(z^2+2z-3)\sqrt{4-z^2}}\right. \\
&\left. + \int_{\gamma_\epsilon(+2)} \frac{dz}{(z^2+2z-3)\sqrt{4-z^2}} + \int_{\gamma_\epsilon(-2)} \frac{dz}{(z^2+2z-3)\sqrt{4-z^2}}\right].
\end{aligned}$$

Gli integrali sugli archi infinitesimi $\gamma_\pm$, centrati in $z_2 = 1$, sono

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{\gamma_\pm} \frac{dz}{(z^2+2z-3)\sqrt{4-z^2}} = -i\pi A_\pm = \mp \frac{i\pi}{4\sqrt{3}}\,,$$

in quanto si hanno i limiti uniformi

$$A_\pm = \lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{1}{(z-z_1)\sqrt{(2-z)(2+z)}} = \frac{1}{\pm 4\sqrt{3}}\,.$$

Il contributo degli archi $\gamma_\epsilon(\pm 2)$ è nullo,

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{\gamma_\epsilon(\pm 2)} \frac{dz}{(z^2+2z-3)\sqrt{4-z^2}} = 0$$

infatti si hanno i limiti uniformi

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{z\mp 2}{(z^2+2z-3)\sqrt{4-z^2}} = \lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{\mp\sqrt{2\mp z}}{z^2+2z-3} = 0\,.$$

In definitiva

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\oint_\Gamma \frac{dz}{(z^2+2z-3)\sqrt{4-z^2}} = 2\,\mathrm{Pr}\int_{-2}^{2}\frac{dx}{(z^2+2z-3)\sqrt{4-x^2}} = 2P\,.$$

L'integrale su Γ si calcola con il teorema dei residui come

$$P = \frac{1}{2}\lim_{\epsilon\to 0^+}\oint_\Gamma \frac{dz}{(z-z_1)(z-z_2)\sqrt{4-z^2}} = i\pi\,\mathrm{Res}\left[\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)\sqrt{4-z^2}}, z=z_1\right]\,.$$

Per valutare la radice quadrata in $z=z_1=-3$ è necessario considerare le determinazioni scelte per le funzioni $(2\pm z)$, ovvero

$$\left.\sqrt{4-z^2}\right|_{z=-3} = \left.\sqrt{|2-z|e^{i\theta_2}|2+z|e^{i\theta_1}}\right|_{z=-3} = \sqrt{5e^{i0}\,1e^{i\pi}} = \sqrt{5}\,e^{i\pi/2} = i\sqrt{5}$$

da cui

$$\mathrm{Res}\left[\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)\sqrt{4-z^2}}, z=z_1\right] = \frac{1}{(z_1-z_2)i\sqrt{5}} = \frac{1}{-4i\sqrt{5}}\,.$$

Infine per l'integrale completo si ha

$$P = i\pi\,\mathrm{Res}\left[\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)\sqrt{4-z^2}}, z=z_1\right] = -\frac{\pi}{4\sqrt{5}}\,.$$

Terzo problema (punteggio 5/30)

Data la funzione reale a due variabili reali

$$u(x,y) = \cos(x^2-y^2)\cosh(2xy)\,,$$

si verifichi che può rappresentare la parte reale di una funzione analitica $f(z)$ e si determini tale funzione con la condizione $f(0)=1$.

Soluzione del terzo problema

Si può usare la formula

$$f(z) = 2u\left(\frac{z}{2},\frac{z}{2i}\right) - u(0,0)\,,$$

che vale nel caso in cui la funzione abbia un valore reale nell'origine.
Con la condizione $u(0,0)=f(0)=1$, si ha

$$\begin{aligned} f(z) &= 2\cos(z^2/4+z^2/4)\cosh(iz^2/2)-1\\ &= 2\cos(z^2/2)\cos(z^2/2)-1\\ &= 2\cos^2(z^2/2)-1\\ &= \cos(z^2)\,. \end{aligned}$$

La funzione cercata è

$$f(z) = \cos(z^2)\,.$$

Quarto problema (punteggio 6/30)

Date le matrici 3×3, scritte in notazioni a blocchi,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix},$$

dove σ_2 e σ_3 sono la seconda e terza matrice di Pauli (2×2), si dimostri che la matrice

$$U = e^{[A,B]}$$

è unitaria e si determinino autovettori ed autovalori.

Soluzione del quarto problema

Sfruttando l'algebra delle matrici di Pauli, espressa da commutatore

$$[\sigma_m, \sigma_n] = 2i\epsilon_{mnl}\sigma_l \,,$$

da cui

$$[\sigma_2, \sigma_3] = 2i\sigma_1 \,,$$

si ottiene, per il commutatore tra le matrici A e B,

$$[A,B] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & [\sigma_2, \sigma_3] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2i\sigma_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2i \\ 0 & 2i & 0 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori della matrice commutatore $[A,B]$ sono le soluzioni dell'equazione in λ

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2i \\ 0 & 2i & -\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$-\lambda(\lambda^2 + 4) = 0 \qquad \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 2i \\ \lambda_3 = -2i \end{array}.$$

Gli autovettori corrispondenti sono

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Per il teorema ottico qusti ultimi sono anche autovettori della matrice $U = e^{[A,B]}$, con autovalori $\{\mu_k = e^{\lambda_k}\}_{k=1}^3$, ovvero

$$U u_k = \mu_k u_k \,, \qquad \begin{array}{l} \mu_1 = e^{\lambda_1} = 1 \\ \mu_2 = e^{\lambda_1} = e^{2i} \\ \mu_3 = e^{\lambda_1} = e^{-2i} \end{array},$$

essendo questi autovalori delle fasi pure, $|\mu_k| = 1$, $k = 1, 2, 3$, si ha che U è una matrice unitaria.

Quinto problema (punteggio 6/30)

Sia A una matrice 4×4, che rappresenta un operatore hermitiano in uno spazio di Hilbert a quattro dimensioni e che ha i quattro autovalori

$$\alpha_1 = -2\,, \qquad \alpha_2 = -1\,, \qquad \alpha_3 = 1\,, \qquad \alpha_4 = 2\,.$$

Rispetto alla base canonica, gli autovettori corrispondenti ai primi tre autovalori sono

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si determinino il quarto autovettore e la matrice A. Si dimostri, infine, che la matrice $B = \cos^2(\pi A)$ è l'identità.

Soluzione del quinto problema

Essendo la matrice hermitiana, in quanto l'operatore che rappresenta è hermitiano, si ha che gli autostati relativi ad autovalori distinti sono ortogonali. Quindi il quarto autostato è ortogonale ai primi tre. Detto

$$a_4 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix},$$

dalle tre condizioni di ortogonalità segue

$$\begin{cases} a_1^\dagger a_4 = 0 \\ a_2^\dagger a_4 = 0 \\ a_3^\dagger a_4 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x + w = 0 \\ x - w = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ w = 0 \\ y = -z \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La versione diagonale di A è

$$A_d = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

La matrice unitaria che diagonalizza A si ottiene allineando gli autovettori, normalizzati ad uno, lungo le colonne, cioè

$$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da cui si ottiene

$$
\begin{aligned}
A &= UA_dU^\dagger \\
&= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -3/2 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 3/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 3/2 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & -3/2 \end{pmatrix} .
\end{aligned}
$$

Infine, per il teorema spettrale, la matrice $B = \cos^2(\pi A)$ ha gli stessi autovettori di A e come autovalori i numeri dell'insieme $\{\cos^2(\pi\alpha_k)\}_{k=1}^4$, che sono tutti uguali ad uno. Ne consegue che la rappresentazione diagonale di B, è l'identità, ovvero: $B_d = I$. Per ottenere B si usa la stessa matrice unitaria diagonalizzante di A, in quanto gli autovettori sono gli stessi,

$$B = UB_dU^\dagger = UIU^\dagger = UU^\dagger = I\,.$$

Sesto problema (punteggio 5/30)

Si calcoli la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = x^3 e^{-x^2}\,.$$

Suggerimento. È utile in questo caso la regola di trasformazione delle derivate di una funzione.

Soluzione del sesto Problema

La regola di trasformazione delle derivate di una funzione $g(x)$ è

$$\mathscr{F}_k\left[\frac{d^n g(x)}{dx^n}\right] = (ik)^n\,\mathscr{F}_k\left[g(x)\right] = (ik)^n\,\tilde{g}(k)\,,$$

ovvero, per le anti-trasformate,

$$\mathscr{F}_{-x}\left[\frac{d^n \tilde{g}(k)}{dk^n}\right] = (-ix)^n\,\mathscr{F}_{-x}\left[\tilde{g}(k)\right] = (-ix)^n\,g(x)\,.$$

In particolare, con $g(x) = e^{-x^2}$ ed $n = 3$, avremmo

$$\mathscr{F}_{-x}\left[\frac{d^3 \tilde{g}(k)}{dk^3}\right] = (-ix)^3\,e^{-x^2} = ix^3 e^{-x^2} = if(x)\,,$$

da cui, la trasformata di Fourier di $f(x)$

$$\tilde{f}(k) = -i\frac{d^3\tilde{g}(k)}{dk^3}\,.$$

La funzione $\tilde{g}(k)$ è la trasformata di Fourier della Gaussiana, $\tilde{g}(k) = e^{-k^2/4}/\sqrt{2}$, quindi il risultato finale è

$$\tilde{f}(k) = -\frac{i}{\sqrt{2}}\frac{d^3}{dk^3}e^{-k^2/4} = \frac{ik}{8\sqrt{2}}\left(k^2-6\right)e^{-k^2/4}\,.$$