

METODI MATEMATICI PER LA FISICA

QUARTO APPELLO ESTIVO - 22 SETTEMBRE 2025

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che il punteggio assegnato a ciascuna procedura di risoluzione può variare tra lo zero e il massimo indicato ed è stabilito valutando:

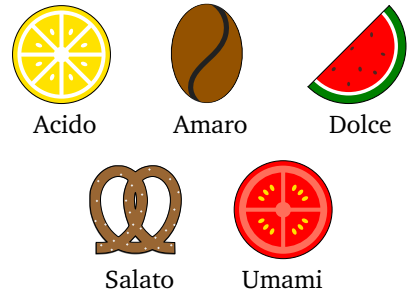
1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo;
6. la bellezza e l'armonia del tutto.

PRIMO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si calcoli il "dolce" integrale

$$\text{🍉} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(u)}{\cosh(u) + 1} du.$$

Curiosità. Il senso del gusto può essere definito come la risultante di cinque componenti fondamentali, dette anche gusti fondamentali: **acido**, **amaro**, **dolce**, **salato** e **umami**. Quest'ultimo è un termine di origine giapponese e indica il sapore del glutammato di sodio, tipico dei pomodori maturi e, in generale degli alimenti fermentati. Nella figura sono rappresentati i simboli dei cinque gusti fondamentali usati più frequentemente, che sono: il **limone** per l'acido, il **chicco di caffè** per l'amaro, l'**anguria** per il dolce, il **brezel**, tipico pane salato tedesco, per il salato e il **pomodoro** per l'umami.



SOLUZIONE DEL PRIMO PROBLEMA

La funzione integranda è meromorfa, è infatti il rapporto di due funzioni intere, i poli, che coincidono con gli zeri della funzione a denominatore non corrispondenti a zeri di ordine uguale o superiore della funzione a numeratore, sono i punti dell'insieme $\{z_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, tali che $\cosh(z_k) + 1 = 0$, quindi

$$z_k = i\pi(2k + 1), \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

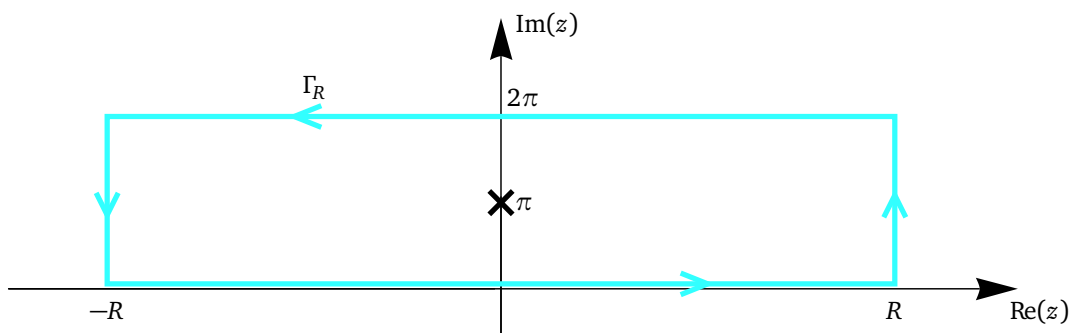
sono i multipli dispari dell'immaginario puro $i\pi$, in cui la funzione coseno iperbolico vale -1 . Nessuno dei poli appartiene all'asse reale, i più vicini sono $z_0 = i\pi$ e $z_{-1} = -i\pi$ e sono simmetrici rispetto allo stesso asse reale. Consideriamo il percorso chiuso rettangolare, mostrato in figura,

$$\Gamma_R = [-R, R] \cup [R, R + 2i\pi] \cup [R + 2i\pi, -R + 2i\pi] \cup [-R + 2i\pi, -R],$$

dove il simbolo $[z_1, z_2]$ rappresenta il segmento complesso rettilineo con estremi z_1 e z_2 , orientato dal primo verso il secondo estremo.

Il percorso chiuso avvolge una sola volta il polo $z_0 = i\pi$, indicato in figura dal simbolo "x". L'integrale della stessa funzione integranda del problema su Γ_R è pari a $2i\pi$ volte il residuo in z_0 e non dipende dal valore di R , cioè

$$\oint_{\Gamma_R} \frac{\cos(z)}{\cosh(z) + 1} dz = 2i\pi \operatorname{Res} \left[\frac{\cos(z)}{\cosh(z) + 1}, z_0 \right], \quad \forall R \in (0, \infty).$$



Per calcolare il residuo usiamo gli sviluppi in serie di Taylor noti delle funzioni trigonometriche e iperboliche centrati nel polo z_0 . Per il coseno iperbolico si ha

$$\cosh(z - i\pi) = -\cosh(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(z - i\pi)^{2j}}{(2j)!},$$

dalla seconda identità segue lo sviluppo in serie della funzione a denominatore della funzione integranda, ovvero

$$\begin{aligned} \cosh(z) + 1 &= -\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(z + i\pi)^{2j}}{(2j)!} = -\frac{(z - i\pi)^2}{2} - \frac{(z - i\pi)^4}{4!} + \mathcal{O}((z - i\pi)^6) \\ &= -\frac{(z - i\pi)^2}{2} \left[1 + \frac{(z - i\pi)^2}{12} + \mathcal{O}((z - i\pi)^4) \right]. \end{aligned}$$

Per la funzione coseno a numeratore usiamo la formula della somma

$$\begin{aligned} \cos(z) &= \cos(z - i\pi + i\pi) = \cos(z - i\pi) \cos(i\pi) - \sin(z - i\pi) \sin(i\pi) \\ &= \cos(z - i\pi) \cosh(\pi) - i \sin(z - i\pi) \sinh(\pi) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\cosh(\pi) \frac{(z - i\pi)^{2k}}{(2k)!} - i \sinh(\pi) \frac{(z - i\pi)^{2k+1}}{(2k+1)!} \right). \end{aligned}$$

Infine, usando l'espressione della somma della serie geometrica,

$$\begin{aligned} \frac{\cos(z)}{\cosh(z) + 1} &= \frac{-2}{1 + (z - i\pi)^2/12 + \mathcal{O}((z - i\pi)^4)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\cosh(\pi) \frac{(z - i\pi)^{2k}}{(2k-2)!} - i \sinh(\pi) \frac{(z - i\pi)^{2k-1}}{(2k+1)!} \right) \\ &= -2 \left[1 - \left(\frac{(z - i\pi)^2}{12} + \mathcal{O}((z - i\pi)^4) \right) + \left(\frac{(z - i\pi)^2}{12} + \mathcal{O}((z - i\pi)^4) \right)^2 + \dots \right] \\ &\quad \times \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\cosh(\pi) \frac{(z - i\pi)^{2k}}{(2k-2)!} - i \sinh(\pi) \frac{(z - i\pi)^{2k-1}}{(2k+1)!} \right). \end{aligned}$$

Siamo interessati al residuo, che coincide con il coefficiente della potenza $(z - i\pi)^{-1}$, poiché il primo fattore tra parentesi quadre ha solo potenze pari e quelli della serie hanno, solo potenze pari il primo, solo dispari il secondo, l'unico prodotto che dà la potenza -1 cercata è quello tra l'unità nella parentesi quadra il secondo termine della serie con $k = 0$, che ha, appunto la potenza cercata. Quindi, scrivendo esplicitamente solo questo termine, si ha

$$\frac{\cos(z)}{\cosh(z) + 1} = \dots + 2i \sinh(\pi) (z - i\pi)^{-1} + \dots,$$

da cui il residuo

$$\text{Res} \left[\frac{\cos(z)}{\cosh(z) + 1}, z_0 \right] = 2i \sinh(\pi).$$

Quindi, usando questo risultato si ha

$$\oint_{\Gamma_R} \frac{\cos(z)}{\cosh(z) + 1} dz = 2i\pi \operatorname{Res} \left[\frac{\cos(z)}{\cosh(z) + 1}, z_0 \right] = -4\pi \operatorname{senh}(\pi).$$

L'integrale sul percorso rettangolare Γ_R può essere scomposto nella somma di quattro integrali su altrettanti tratti rettilinei,

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma_R} \frac{\cos(z)}{\cosh(z) + 1} dz &= \int_{-R}^R \frac{\cos(x)}{\cosh(x) + 1} dx - \int_{-R}^R \frac{\cos(x + 2i\pi)}{\cosh(x + 2i\pi) + 1} dx \\ &\quad + i \int_0^{2\pi} \frac{\cos(R + iy)}{\cosh(R + iy) + 1} dy + i \int_{2\pi}^0 \frac{\cos(-R + iy)}{\cosh(-R + iy) + 1} dy \\ &= \int_{-R}^R \frac{\cos(x)}{\cosh(x) + 1} dx - \int_{-R}^R \frac{\cos(x) \cosh(2\pi) - i \operatorname{sen}(x) \operatorname{senh}(2\pi)}{\cosh(x) + 1} dx \\ &\quad + i \int_0^{2\pi} \frac{\cos(R + iy)}{\cosh(R + iy) + 1} dy - i \int_0^{2\pi} \frac{\cos(R - iy)}{\cosh(R - iy) + 1} dy, \end{aligned}$$

sfruttiamo le simmetrie delle funzioni seno e coseno per elidere l'integrale contenente la funzione $\operatorname{sen}(x)$ e per riscrivere gli ultimi due integrali che coincidono, quindi si ha

$$\oint_{\Gamma_R} \frac{\cos(z)}{\cosh(z) + 1} dz = (1 - \cosh(2\pi)) \int_{-R}^R \frac{\cos(x)}{\cosh(x) + 1} dx + 2i \int_0^{2\pi} \frac{\cos(R + iy)}{\cosh(R + iy) + 1} dy.$$

Studiamo il limite $R \rightarrow \infty$, il primo integrale diventa quello cercato e dimostriamo che il secondo è invece infinitesimo. A tal fine usiamo la disuguaglianza di Darboux

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{2\pi} \frac{\cos(R + iy)}{\cosh(R + iy) + 1} dy \right| &\leq \int_0^{2\pi} \left| \frac{\cos(R + iy)}{\cosh(R + iy) + 1} \right| dy = \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{\cos^2(R) \cosh^2(y) + \operatorname{sen}^2(R) \operatorname{senh}^2(y)}{(\cosh(R) \cos(y) + 1)^2 + \operatorname{senh}^2(R) \operatorname{sen}^2(y)}} dy \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{\cos^2(R) + \operatorname{senh}^2(y)}{\cos^2(y) + \operatorname{senh}^2(R) + 2 \cosh(R) \cos(y) + 1}} dy, \end{aligned}$$

la funzione in y a denominatore della radice quadrata ha un minimo assoluto in $y = \pi$, mentre quella a numeratore è massima in $y = 2\pi$. Al fine di verificarlo, studiamo il comportamento della funzione

$$d(y) = \cos^2(y) + \operatorname{senh}^2(R) + 2 \cosh(R) \cos(y) + 1,$$

per $y \in [0, 2\pi]$. La funzione è simmetrica rispetto a $y = \pi$ in virtù della periodicità della funzione coseno. Il valore agli estremi è

$$d(0) = d(2\pi) = 2 + \operatorname{senh}^2(R) + 2 \cosh(R).$$

Le derivate prima e seconda sono

$$\begin{aligned} d'(y) &= -2 \operatorname{sen}(y) \cos(y) - 2 \cosh(R) \operatorname{sen}(y) = -2 \operatorname{sen}(y) (\cos(y) + \cosh(R)), \\ d''(y) &= -2 \cos(2y) - 2 \cosh(R) \cos(y). \end{aligned}$$

Gli zeri della derivata prima coincidono con gli zeri della funzione seno, infatti per valori di R strettamente positivi, la funzione coseno iperbolico è strettamente maggiore di uno, quindi l'equazione

$$\cos(y) + \cosh(R) = 0$$

non ha soluzioni in $[0, 2\pi]$. Sono punti estremali i valori $y = 0, \pi, 2\pi$, per la simmetria già citata i punti estremali in $y = 0$ e $y = 2\pi$ hanno le stesse caratteristiche. La derivata seconda in questi punti vale

$$d''(0) = d''(2\pi) = -2 - 2 \cosh(R) < 0, \quad d''(\pi) = -2 + 2 \cosh(R) > 0,$$

ne consegue che la funzione ha un minimo in $y = \pi$ e massimi agli estremi $y = 0$ e $y = 2\pi$. Il valore minimo è

$$d(\pi) = 2 + \operatorname{senh}^2(R) - 2 \operatorname{cosh}(R) = 1 + \operatorname{cosh}^2(R) - 2 \operatorname{cosh}(R) = (\operatorname{cosh}(R) - 1)^2 > 0,$$

dove abbiamo usato la relazione dell'equazione iperbolica

$$\operatorname{cosh}^2(R) - \operatorname{senh}^2(R) = 1.$$

Quindi si è ottenuta la limitazione

$$d(y) \geq (\operatorname{cosh}(R) - 1)^2, \quad \forall y \in [0, 2\pi].$$

La funzione a numeratore

$$n(y) = \cos^2(R) + \operatorname{senh}^2(y),$$

grazie al fatto che la funzione iperbolica è monotona crescente, ha minimo in $y = 0$ e massimo in $y = 2\pi$, i valori sono

$$n(0) = \cos^2(R), \quad n(2\pi) = \cos^2(R) + \operatorname{senh}^2(2\pi),$$

ne consegue che, $\forall y \in [0, 2\pi]$,

$$n(y) \leq n(2\pi) = \cos^2(R) + \operatorname{senh}^2(2\pi).$$

Con questi risultati si arriva alla limitazione complessiva

$$\left| \int_0^{2\pi} \frac{\cos(R + iy)}{\operatorname{cosh}(R + iy) + 1} dy \right| \leq \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{n(y)}{d(y)}} dy \leq 2\pi \frac{\sqrt{\cos^2(R) + \operatorname{senh}^2(2\pi)}}{\operatorname{cosh}(R) - 1} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0,$$

che implica l'annullamento dei contributi dati dagli integrali sui tratti verticali di Γ_R nel limite $R \rightarrow \infty$. In definitiva, considerando la scomposizione dell'integrale e il suo valore in termini del residuo in z_0 , si ottiene

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{\Gamma_R} \frac{\cos(z)}{\operatorname{cosh}(z) + 1} dz = (1 - \operatorname{cosh}(2\pi)) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{\operatorname{cosh}(x) + 1} dx = (1 - \operatorname{cosh}(2\pi)) \text{🍉} = -4\pi \operatorname{senh}(\pi),$$

quindi, possiamo ottenere il valore 🍉 dell'integrale del problema come

$$\text{🍉} = -4\pi \frac{\operatorname{senh}(\pi)}{1 - \operatorname{cosh}(2\pi)} = -4\pi \frac{\operatorname{senh}(\pi)}{-2 \operatorname{senh}^2(2\pi)},$$

infine, semplificando

$$\text{🍉} = \frac{2\pi}{\operatorname{senh}(2\pi)}.$$

SECONDO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si ottenga il valore "acido" dell'integrale

$$\text{🍊} = \oint_{|z|=1} \left(\operatorname{sen}(3^{1/z}) + \frac{1}{\operatorname{sen}(3^{1/z})} \right) dz.$$

Curiosità. Come descritto nel primo problema, il limone 🍊 indica il gusto acido, uno dei cinque fondamentali.

SOLUZIONE DEL SECONDO PROBLEMA

L'origine rappresenta una singolarità essenziale per la funzione integranda. Riscriviamo l'integrale come somma di due contributi, \odot_1 e \odot_2 , relativi agli integrali della funzione seno e del suo reciproco, cioè

$$\odot = \odot_1 + \odot_2,$$

dove

$$\odot_1 = \oint_{|z|=1} \operatorname{sen}(3^{1/z}) dz, \quad \odot_2 = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{\operatorname{sen}(3^{1/z})}.$$

La funzione integranda del primo integrale \odot_1 ha solo una singolarità essenziale isolata nell'origine, con il teorema dei residui e si ha

$$\odot_1 = 2i\pi \operatorname{Res}[\operatorname{sen}(3^{1/z}), 0].$$

Per calcolare il residuo usiamo le serie di Laurent della funzione integranda, che otteniamo dalle serie note delle funzioni seno ed esponenziale, ovvero

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(3^{1/z}) &= \operatorname{sen}(e^{\ln(3)/z}) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(e^{\ln(3)/z})^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{e^{(2k+1)\ln(3)/z}}{(2k+1)!} = \sum_{k,j=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{(2k+1)^j \ln^j(3)}{j!} z^{-j} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} + \frac{1}{z} \ln(3) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (2k+1) + \frac{1}{z^2} \ln^2(3) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (2k+1)^2 + \dots \\ &= \operatorname{sen}(1) + \frac{1}{z} \ln(3) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} + \frac{1}{z^2} \ln^2(3) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} (2k+1) + \dots \\ &= \operatorname{sen}(1) + \frac{1}{z} \ln(3) \cos(1) + \frac{1}{z^2} \ln^2(3) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \right) + \dots \\ &= \operatorname{sen}(1) + \frac{1}{z} \ln(3) \cos(1) + \frac{1}{z^2} \ln^2(3) (-\operatorname{sen}(1) + \cos(1)) + \dots \end{aligned}$$

Abbiamo così ottenuto la serie di Laurent della prima funzione integranda. Come atteso, la parte principale ha infiniti termini, poiché l'origine è una singolarità essenziale per la funzione, la parte regolare ha invece il solo termine costante. Il residuo coincide con il coefficiente della potenza z^{-1} , quindi

$$\odot_1 = 2i\pi \ln(3) \cos(1).$$

La funzione integranda del secondo integrale \odot_2 ha, oltre alla singolarità essenziale nell'origine, un'infinità di poli semplici in corrispondenza degli zeri della funzione seno. Indichiamo con $\{z_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ l'insieme dei poli in cui non includiamo l'origine. Il fatto che tali poli siano un'infinità numerabile, implicito nell'indicazione del pedice discreto $k \in \mathbb{Z}$, è conseguenza della periodicità della funzione seno. Il valori dei poli si ottengono come soluzioni delle equazioni

$$3^{1/z_k} = e^{\ln(3)/z_k} = k\pi, \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

ovvero

$$z_k = \frac{\ln(3)}{\ln(k\pi)} = \frac{\ln(3)}{\ln(k) + \ln(\pi)}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Tutti i poli sono interni alla circonferenza unitaria, infatti i loro moduli sono tutti strettamente minori di uno, come si evince dalla limitazione

$$|z_k| = \frac{\ln(3)}{\sqrt{(\ln|k| + \ln(\pi))^2 + \theta(k-1/2)\pi^2}} \leq \frac{\ln(3)}{\ln(\pi)} < 1.$$

Anche in questo caso possiamo ottenere il valore dell'integrale \odot_2 usando la serie di Laurent della funzione integranda centrata nell'origine e convergente nella corona circolare $C = \{z : |z| > \ln(3)/\ln(\pi)\}$. Sfruttando le serie di Taylor note e quanto già visto nel caso precedente, si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{\operatorname{sen}(3^{1/z})} &= \frac{1}{\operatorname{sen}(e^{\ln(3)/z})} = \left(\operatorname{sen}(1) + \frac{1}{z} \ln(3) \cos(1) + \frac{1}{z^2} \ln^2(3) (-\operatorname{sen}(1) + \cos(1)) + \dots \right)^{-1} \\ &= \frac{1}{\operatorname{sen}(1)} \left(1 + \frac{1}{z} \frac{\ln(3) \cos(1)}{\operatorname{sen}(1)} + \frac{1}{z^2} \ln^2(3) \left(-1 + \frac{\cos(1)}{\operatorname{sen}(1)} \right) + \dots \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Nella corona circolare di convergenza C vale la limitazione $1/|z| < \ln(3)/\ln(\pi) < 1$, quindi possiamo usare la somma della serie geometrica per scrivere il termine nella parentesi tonda in forma di serie, cioè

$$\begin{aligned} \frac{1}{\operatorname{sen}(3^{1/z})} &= \frac{1}{\operatorname{sen}(1)} \left[1 - \left(\frac{1}{z} \frac{\ln(3) \cos(1)}{\operatorname{sen}(1)} + \frac{1}{z^2} \ln^2(3) \left(-1 + \frac{\cos(1)}{\operatorname{sen}(1)} \right) + \dots \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{z} \frac{\ln(3) \cos(1)}{\operatorname{sen}(1)} + \frac{1}{z^2} \ln^2(3) \left(-1 + \frac{\cos(1)}{\operatorname{sen}(1)} \right) + \dots \right)^2 + \dots \right] \\ &= \frac{1}{\operatorname{sen}(1)} - \frac{1}{z} \frac{\ln(3) \cos(1)}{\operatorname{sen}^2(1)} + \dots, \end{aligned}$$

dove il coefficiente della potenza z^{-1} è

$$C_{-1} = -\frac{\ln(3) \cos(1)}{\operatorname{sen}^2(1)}.$$

Questo coefficiente coincide a $1/(2i\pi)$ volte l'integrale cercato \odot_2 , infatti, la definizione del coefficiente di Laurent, tendo conto della corona di convergenza è

$$C_{-1} = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\gamma} \frac{dz}{\operatorname{sen}(3^{1/z})},$$

dove la curva γ è chiusa, contenuta nella corona C e avvolge una sola volta l'origine. Possiamo scegliere come curva γ la circonferenza unitaria, quindi

$$C_{-1} = \frac{1}{2i\pi} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{\operatorname{sen}(3^{1/z})} = \frac{1}{2i\pi} \odot_2,$$

da cui

$$\odot_2 = 2i\pi C_{-1} = -2i\pi \frac{\ln(3) \cos(1)}{\operatorname{sen}^2(1)}.$$

Il risultato completo è la somma dei due contributi

$$\odot = \odot_1 + \odot_2 = 2i\pi \left(\ln(3) \cos(1) - \frac{\ln(3) \cos(1)}{\operatorname{sen}^2(1)} \right),$$

che, con le opportune semplificazioni, si riduce a

$$\odot = -2i\pi \frac{\ln(3) \cos^3(1)}{\operatorname{sen}^2(1)}.$$

TERZO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si determini l'“amara” funzione meromorfa $\textcircled{A}(z)$, tale da avere:

- poli tripli nei punti dell'insieme $\{z_k = k\pi\}_{k \in \mathbb{Z}}$;
- parte principale della serie di Laurent centrata nel k -esimo polo z_k ,

$$G_k(z) = (-1)^k \left(\frac{1}{(z - z_k)^3} + \frac{1}{(z - z_k)^2} + \frac{1}{z - z_k} \right), \quad \forall k \in \mathbb{Z};$$

- valore unitario in $z = \pi/2$, cioè $\textcircled{A}(\pi/2) = 1$;
- comportamento regolare all'infinito.

Curiosità. Come descritto nel primo problema, il chicco di caffè \textcircled{A} indica il gusto amaro, uno dei cinque fondamentali.

SOLUZIONE DEL TERZO PROBLEMA

Usiamo il teorema di Mittag-Leffler, che afferma l'esistenza della funzione meromorfa richiesta e che tale funzione è la somma della serie delle parti principali e della cosiddetta parte intera $\phi(z)$, cioè

$$\textcircled{A}(z) = \phi(z) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_k(z) = \phi(z) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{(z - z_k)^3} + \frac{1}{(z - z_k)^2} + \frac{1}{z - z_k} \right).$$

Poiché il comportamento all'infinito è regolare, si ha che la parte intera è costante e possiamo porre $\phi(z) = \phi_0$, il cui valore è da determinare. Per calcolare la somma della serie delle parti principali di Laurent, usiamo il metodo dei residui, considerando separatamente i tre contributi, che sono tutti della forma

$$S_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(z - z_k)^n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(z - k\pi)^n},$$

con le potenze $n = 1, 2, 3$. Sono serie a segni alterni, che possiamo definire in termini di una funzione

$$s_n(w) = \frac{1}{(z - w\pi)^n},$$

come

$$S_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k s_n(k),$$

con $n = 1, 2, 3$. In termini delle tre serie S_n , la serie di Mittag-Leffler è

$$\textcircled{A}(z) = \phi(z) + S_3 + S_2 + S_1.$$

La somma della serie che S_n si ottiene mediante lo studio del valore limite per $m \rightarrow \infty$ dell'integrale

$$J_n(m) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{|w|=m+1/2} s_n(w) \frac{\pi}{\text{sen}(w\pi)} dw,$$

con $m \in \mathbb{N}$. Per un valore generico $m \in \mathbb{N}$, usando il teorema dei residui si ha

$$J_n(m) = \sum_{k=-m}^m \text{Res} \left[s_n(w) \frac{\pi}{\text{sen}(w\pi)}, k \right] + \text{Res} \left[s_n(w) \frac{\pi}{\text{sen}(w\pi)}, \frac{z}{\pi} \right],$$

dove i residui della somma sono dovuti ai poli semplici della funzione seno a denominatore della funzione integranda, mentre il secondo residuo è relativo al polo di ordine n dovuto, invece, alla funzione $s_n(w)$. Avremo

$$J_n(m) = \sum_{k=-m}^m (-1)^k s_n(k) + \frac{(-1)^n}{\pi^{n-1}(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dw^{n-1}} \frac{1}{\text{sen}(w\pi)} \Big|_{w=z/\pi},$$

con $n = 1, 2, 3$. Poiché, nei tre casi oggetto di studio si ha l'annullamento del limite, cioè

$$\lim_{m \rightarrow \infty} J_n(m) = 0, \quad \forall n \in \{1, 2, 3\},$$

otteniamo i valori delle tre serie come

$$S_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k s_n(k) = - \frac{(-1)^n}{\pi^{n-1} (n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dw^{n-1}} \frac{1}{\operatorname{sen}(w\pi)} \Big|_{w=z/\pi}, \quad \forall n \in \{1, 2, 3\}.$$

In dettaglio, si hanno le derivate: zero, prima e seconda

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k s_1(k) = \frac{1}{\operatorname{sen}(w\pi)} \Big|_{w=z/\pi} = \frac{1}{\operatorname{sen}(z)}, \\ S_2 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k s_2(k) = - \frac{1}{\pi} \frac{d}{dw} \frac{1}{\operatorname{sen}(w\pi)} \Big|_{w=z/\pi} = \frac{\cos(w\pi)}{\operatorname{sen}^2(w\pi)} \Big|_{w=z/\pi} = \frac{\cos(z)}{\operatorname{sen}^2(z)}, \\ S_3 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k s_3(k) = \frac{1}{2\pi^2} \frac{d^2}{dw^2} \frac{1}{\operatorname{sen}(w\pi)} \Big|_{w=z/\pi} = \frac{1 + \cos^2(w\pi)}{2 \operatorname{sen}^3(w\pi)} \Big|_{w=z/\pi} = \frac{1 + \cos^2(z)}{2 \operatorname{sen}^3(z)}. \end{aligned}$$

Possiamo così scrivere l'espressione della funzione cercata come

$$\mathcal{F}(z) = \phi_0 + \frac{1}{\operatorname{sen}(z)} + \frac{\cos(z)}{\operatorname{sen}^2(z)} + \frac{1 + \cos^2(z)}{2 \operatorname{sen}^3(z)} = \phi_0 + \frac{2 \operatorname{sen}(2z) - \cos(2z) + 5}{4 \operatorname{sen}^3(z)}$$

e il valore costante ϕ_0 può essere ora calcolato avvalendosi della condizione $\mathcal{F}(\pi/2) = 1$. Infatti, valutando la funzione in $z = \pi/2$, si ha

$$1 = \mathcal{F}(\pi/2) = \phi_0 + \frac{3}{2},$$

quindi $\phi_0 = -1/2$ e il risultato finale è

$$\mathcal{F}(z) = -\frac{1}{2} + \frac{2 \operatorname{sen}(2z) - \cos(2z) + 5}{4 \operatorname{sen}^3(z)}.$$

SOLUZIONE DEL TERZO PROBLEMA, UN'ALTRA POSSIBILITÀ

Consideriamo lo sviluppo di Mittag-Leffler della funzione

$$f(z) = \frac{1}{\operatorname{sen}(z)}.$$

La funzione è meromorfa e ha poli semplici negli stessi punti della funzione data, ovvero in quelli dell'insieme $\{z_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$. I residui sono

$$R_k = \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{z - z_k}{\operatorname{sen}(z)} = \frac{1}{\cos(z_k)} = (-1)^k, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Lo sviluppo di Mittag-Leffler è

$$f(z) = \eta(z) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{R_k}{z - z_k} = \eta(z) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{z - k\pi},$$

dove la funzione $\eta(z)$ è la parte intera della funzione $f(z)$ e ha lo stesso comportamento asintotico. Poiché la funzione all'infinito è regolare $\eta(z)$ è costante e uguale a η_0 . Determiniamo η_0 valutando l'espressione nell'origine, il particolare consideriamo il limite nullo

$$0 = \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\operatorname{sen}(z)} - \frac{1}{z} \right) = \eta_0 + \lim_{z \rightarrow 0} \sum_{k \neq 0} \frac{(-1)^k}{z - k\pi} = \eta_0,$$

la serie completa è nulla in quanto, quella con indici positivi è opposta a quella con indici negativi. Si ottiene, quindi, $\eta_0 = 0$ e lo sviluppo è

$$f(z) = \frac{1}{\operatorname{sen}(z)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{z - k\pi} = S_1$$

e coincide con la funzione S_1 precedentemente definita. Per ottenere le serie dei poli di ordini due e tre, ovvero le funzioni S_2 e S_3 consideriamo le derivate prima e seconda, rispettivamente, si hanno

$$\begin{aligned} \frac{df}{dz} &= -\frac{\cos(z)}{\operatorname{sen}^2(z)} = -\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(z - k\pi)^2} = -S_2 \quad \Rightarrow \quad S_2 = \frac{\cos(z)}{\operatorname{sen}^2(z)}, \\ \frac{d^2f}{dz^2} &= \frac{2\cos^2(z) + \operatorname{sen}^2(z)}{\operatorname{sen}^3(z)} = \frac{1 + \cos^2(z)}{\operatorname{sen}^3(z)} = 2\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(z - k\pi)^3} = 2S_3 \quad \Rightarrow \quad S_3 = \frac{1 + \cos(z)}{2\operatorname{sen}^3(z)}. \end{aligned}$$

I valori di S_2 e S_3 così ottenuti coincidono con quelli calcolati nel paragrafo precedente quindi, seguendo quanto già fatto per determinare il valore costante ϕ_0 , arriviamo alla stessa soluzione

$$\phi(z) = -\frac{1}{2} + \frac{2\operatorname{sen}(2z) - \cos(2z) + 5}{4\operatorname{sen}^3(z)}.$$

QUARTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

L'operatore "salato" $\widehat{\mathfrak{Q}}$ è definito nello spazio di Hilbert a $N = n(n+1)/2$ dimensioni E_N , con $n, N \in \mathbb{N}$ e, rispetto alla base ortonormale $\{|u_k\rangle\}_{k=1}^N \subset E_N$, è rappresentato dalla matrice diagonale in notazione a blocchi

$$\widehat{\mathfrak{Q}} \stackrel{u}{\leftarrow} \mathfrak{Q} = \operatorname{diag}(1, U_2, U_3, \dots, U_n),$$

dove U_j , con $j \in \{2, 3, \dots, n\}$, è una matrice $j \times j$, i cui elementi sono tutti uguali all'unità, cioè

$$U_j = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad \forall j \in \{2, 3, \dots, n\}.$$

Si classifichi l'operatore, si ottengono gli autovalori e i vettori che rappresentano gli autovettori rispetto alla base data.

Curiosità. Come descritto nel primo problema, il brezel \mathfrak{Q} indica il gusto salato, uno dei cinque fondamentali.

SOLUZIONE DEL QUARTO PROBLEMA

La notazione a blocchi permette di scomporre il problema in sottocasi, trattando ogni blocco singolarmente e in modo indipendente dagli altri. Possiamo, cioè risolvere il problema agli autovalori per il j -esimo blocco

$$U_j v_l = \sigma_l v_l, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad \forall l \in \left\{ \frac{j(j-1)}{2} + 1, \frac{j(j-1)}{2} + 2, \dots, \frac{j(j+1)}{2} \right\},$$

dove gli insiemi $\{v_l\}_{l=\frac{j(j-1)}{2}+1}^{\frac{j(j+1)}{2}}$ e $\{\eta_l\}_{l=\frac{j(j-1)}{2}+1}^{\frac{j(j+1)}{2}}$ sono rispettivamente quello degli autovettori e dei corrispondenti autovalori della matrice U_j , con $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Abbiamo incluso anche il valore $j = 1$ e cioè il caso banale $U_1 = 1$, ovvero della matrice 1×1 , che non è altro che lo scalare 1, appunto. A caratterizzare autovettori e autovalori, associandoli al particolare blocco, il j -esimo in questo caso, con $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, è l'intervallo di variazione dell'indice l , che assume j valori. Gli autovettori dell'insieme $\{v_l\}_{l=\frac{j(j-1)}{2}+1}^{\frac{j(j+1)}{2}}$ sono matrici $j \times 1$.

Poiché tutte le matrici U_j hanno la stessa forma, ovvero, sono $j \times j$ e hanno tutti gli elementi uguali all'unità, si ha

$$U_j^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j & j & \cdots & j \\ j & j & \cdots & j \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ j & j & \cdots & j \end{pmatrix} = j \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = jU_j,$$

$\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$, iterando m volte con $m \in \mathbb{N}$, si ha

$$U_j^m = jU_j^{m-1} = j^{m-1}U_j, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Sfruttiamo questa relazione per ottenere lo spettro della j -esima matrice. Infatti, la matrice è hermitiana, quindi possiamo applicare il teorema spettrale, secondo il quale una potenza generica $m \in \mathbb{N}$ della matrice ha gli stessi autovettori della matrice originale e per autovalori le potenze m -esime degli autovalori originali. Quindi se v è l'autovettore della matrice U_j con autovalore σ , cioè si ha l'equazione agli autovalori

$$U_j v = \sigma v,$$

allora, la matrice U_j^m verifica l'equazione

$$U_j^m v = \sigma^m v.$$

Poiché, come dimostrato, si ha la relazione $U_j^m = jU_j^{m-1}$, si ottiene un'equazione per gli autovalori, ovvero

$$\sigma^m v = U_j^m v = jU_j^{m-1} v = j\sigma^{m-1} v \quad \Rightarrow \quad \sigma^{m-1}(\sigma - j) = 0,$$

da cui si evincono due possibili autovalori: $\sigma = j$ e $\sigma = 0$. L'equazione precedente vale per ogni $m \in \mathbb{N}$, nel caso $m = 2$ dà

$$U_j^2 v = \sigma^2 v, \quad U_j^2 v = jU_j v = j\sigma v \quad \Rightarrow \quad \sigma^2 = j\sigma,$$

l'ultima identità vale per ogni autovalore σ , con $j \in \{1, 2, \dots, m\}$, se ne deduce che, essendo gli autovalori reali, la matrice è infatti hermitiana, questi sono non negativi, cioè $\sigma \geq 0$. Le informazioni ottenute fino a ora sono:

- ci sono gli autovalori $\sigma = j$ e $\sigma = 0$;
- tutti gli autovalori sono non negativi;
- la loro somma è

$$\text{Tr}(U_j) = \sum_{l=j(j-1)/2+1}^{j(j+1)/2} \sigma_l = j + \sum_{l=j(j-1)/2+2}^{j(j+1)/2} \sigma_l = j,$$

dove abbiamo attribuito il valore j al primo, ovvero

$$\sigma_{j(j-1)/2+1} = j.$$

Dall'ultima identità segue che la somma degli ultimi $j-1$ autovalori della matrice U_j è nulla. Ma, essendo gli stessi non negativi, l'unica possibilità è che siano tutti nulli. Quindi la matrice U_j ha lo spettro discreto contenente l'autovalore non degenere $\sigma_{j(j-1)/2+1} = j$ e l'autovalore nullo con grado di degenerazione $j-1$, questo per ogni $j \in \{2, \dots, n\}$. Nel caso $j = 1$, la matrice $U_1 = 1$ è lo scalare 1 e ha il solo autovalore non degenere $\sigma_1 = 1$. L'autovettore relativo all'autovalore non nullo, $\sigma_{L_j} = j$, che ha indice $L_j \equiv j(j-1)/2 + 1$, verifica l'equazione

$$(U_j - I_j j) v_{L_j} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1-j & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-j & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1-j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{L_j}^1 \\ v_{L_j}^2 \\ \vdots \\ v_{L_j}^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

sottraendo alla prima riga la k -esima, con $k \in \{2, 3, \dots, j\}$, si ha

$$-jv_{L_j}^1 + jv_{L_j}^k = 0 \quad \Rightarrow \quad v^k = v^1,$$

ne consegue che tutte le componenti contro-varianti sono uguali e, normalizzando, possiamo definirle come

$$v_{L_j}^1 = v_{L_j}^2 = \dots = v_{L_j}^j = \frac{1}{\sqrt{j}}.$$

L'autovettore della matrice U_j relativo all'autovalore σ_{L_j} è il vettore $j \times 1$

$$v_{L_j} = \frac{1}{\sqrt{j}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le componenti contro-varianti degli autovettori relativi agli autovalori nulli, che rappresentano un insieme di $j-1$ vettori linearmente indipendenti, poiché la matrice è hermitiana e quindi normale, si ottengono come soluzioni dei sistemi

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_l^1 \\ v_l^2 \\ \vdots \\ v_l^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad l \in \{L_j, L_j + 1, \dots, L_l + j - 1\}.$$

Soluzioni possibili sono quelle con $v_l^1 = 1/\sqrt{2}$ per ogni $l \in \{L_j, L_j + 1, \dots, L_l + j - 1\}$ e una sola altra componente non nulla e opposta alla v_l^1 . Quindi, i $j-1$ autovettori linearmente indipendenti, relativi all'autovalore nullo della matrice U_j sono i vettori $j \times 1$, qui riportati accanto al vettore già ottenuto v_{L_j}

$$v_{L_j} = \frac{1}{\sqrt{j}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_{L_j+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_{L_j+2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad v_{L_j+j-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Questi vettori non sono ortogonali, ma, usando il metodo di Gram-Schmidt, è possibile ottenere un insieme di $j-1$ loro combinazioni lineari, che rappresentano un insieme di vettori ortogonali, che sono ancora autovettori con autovalore nullo e che sono in corrispondenza biunivoca con l'insieme di partenza. Quindi, limitarci a questo insieme non ortogonale non comporta perdita di generalità.

Tornando alla forma completa, gli autovalori ottenuti per il j -esimo blocco, con $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, sono autovalori anche per la matrice \mathcal{U} e hanno autovettori $N \times 1$, che, in notazione a blocchi, sono costituiti dai blocchi $j \times 1$ dell'insieme $\{v_l\}_{L_j}^{L_j+j-1}$ in posizione j -esima. Si hanno cioè le j equazioni agli autovalori

$$\mathcal{U} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ v_l \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & U_2 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & U_j & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & U_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & U_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ v_l \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ U_j v_l \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \sigma_l \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ v_l \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$\forall l \in \{L_j, L_j + 1, \dots, L_j + j - 1\}$ e $\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$. In totale ci sono

$$N = \sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2}$$

autovalori e autovettori, che sono elementi rispettivamente degli insiemi

$$\left\{ \{\sigma_l\}_{l=L_j}^{L_j+j-1} \right\}_{j=1}^n = \{\sigma_k\}_{k=1}^N, \quad \left\{ \{V_l\}_{l=L_j}^{L_j+j-1} \right\}_{j=1}^n = \{V_k\}_{k=1}^N.$$

Lo spettro discreto completo, quindi, contiene la sequenza dei numeri naturali da 1 a n , che sono autovalori non degeneri, unitamente all'autovalore nullo che è invece degenero con grado di degenerazione $n(n-1)/2$.

Il k -esimo vettore dell'insieme $\{V_k\}_{k=1}^N$, con $k \in \{L_j, L_j + 1, \dots, L_j + j - 1\}$, per un opportuno $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, è

$$V_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ v_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ } j\text{-esimo blocco.}$$

È un vettore $N \times 1$, che, in notazione a blocchi ha l'omologo vettore $j \times 1$ v_k nella posizione j -esima e tutti gli altri elementi sono nulli. In particolare, i j vettori V_k , con $k \in \{L_j, L_j + 1, \dots, L_j + j - 1\}$, sono

$$V_{L_j} = \frac{1}{\sqrt{j}} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, V_{L_j+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, V_{L_j+2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, V_{L_j+j-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} V_{L_j} \\ V_{L_j+1} \\ V_{L_j+2} \\ V_{L_j+j-1} \end{matrix}} \right\} \begin{matrix} j\text{-esimo} \\ \text{blocco, dalla} \\ L_j\text{-esima} \\ \text{alla posizione} \\ (L_j + j - 1)\text{-esima.} \end{matrix}$$

QUINTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

L'operatore "fermentato" $\widehat{\text{pomodoro}}$ è definito nello spazio di Hilbert a $M = n^2 + n - 1$ dimensioni K_M con $n, M \in \mathbb{N}$ e, rispetto alla base ortonormale $\{|v_k\rangle\}_{k=1}^N \subset K_M$, è rappresentato dalla matrice diagonale in notazione a blocchi

$$\widehat{\text{pomodoro}} \stackrel{v}{\leftrightarrow} \text{pomodoro} = \text{diag}(U_n, U_{n-1}, \dots, U_2, 1, U_2, \dots, U_{n-1}, U_n),$$

dove, come nel quarto problema, U_j , con $j \in \{2, 3, \dots, n\}$, è una matrice $j \times j$, con elementi tutti uguali all'unità, cioè

$$U_j = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad \forall j \in \{2, 3, \dots, n\}.$$

Si ottenga la matrice J che, rispetto alla base data, rappresenta l'operatore \hat{J} , tale che l'operatore prodotto $\hat{P} = \widehat{\text{pomodoro}} \hat{J}$ sia un proiettore.

Curiosità. Come descritto nel primo problema, il pomodoro pomodoro indica il gusto *umami*, uno dei cinque fondamentali.

SOLUZIONE DEL QUINTO PROBLEMA

Un operatore è un proiettore se e solo se è al contempo hermitiano e idempotente. Nel caso in esame, osservando che l'operatore \widehat{P} è hermitiano, l'operatore prodotto \hat{P} è un proiettore se e solo se

$$\begin{aligned}\hat{P} = \hat{P}^\dagger &\Leftrightarrow \left(\widehat{P}\hat{J}\right)^\dagger = \hat{J}^\dagger \widehat{P}^\dagger = \hat{J}^\dagger \widehat{P} = \widehat{P}\hat{J}, \\ \hat{P} = \hat{P}^2 &\Leftrightarrow \widehat{P}\hat{J} = \left(\widehat{P}\hat{J}\right)^2 = \widehat{P}\hat{J}\widehat{P}\hat{J}.\end{aligned}$$

Poiché la matrice \widehat{P} è diagonale a blocchi, consideriamo una matrice J anch'essa diagonale a blocchi, cioè

$$J = \text{diag}(J_n, J_{n-1}, \dots, J_2, J_1, J_2, \dots, J_n),$$

dove J_l , con $l \in \{1, 2, \dots, n\}$ e un blocco $l \times l$, con $l = 1$, si ha J_1 , che è semplicemente uno scalare. Il problema si riduce quindi al generico blocco, ovvero dovremmo definire una matrice $l \times l$, J_l , con $l \in \{1, 2, \dots, n\}$, tale che la matrice prodotto $U_l J_l$ sia hermitiana e idempotente.

Nel prosieguo studiamo il caso di una generica matrice, ovvero di un blocco U_l , con $l \in \{1, 2, \dots, n\}$. Si osserva, come già dimostrato nel quarto problema, che il quadrato della matrice U_l , matrice che ha tutti gli elementi uguali all'unità, è proporzionale alla stessa matrice e si ha

$$U_l^2 = l U_l.$$

Ciò implica che, normalizzando la matrice U_l con il fattore $1/l$, ovvero definendo

$$U'_l = \frac{1}{l} U_l,$$

si che il quadrato della matrice normalizzata U'_l coincide con la stessa matrice

$$U_l'^2 = \frac{1}{l^2} U_l^2 = \frac{1}{l} U_l = U'_l,$$

cioè, la matrice U'_l è idempotente. Inoltre, poiché la matrice U'_l , così come la matrice U_l , è una matrice hermitiana, si ha anche che la stessa matrice normalizzata è un proiettore.

La matrice che si ottiene dal prodotto di una matrice per uno scalare può essere ottenuta anche in forma di prodotto matriciale, cioè come il prodotto della stessa matrice per una seconda matrice che è a sua volta il prodotto della matrice identità per lo scalare considerato, ovvero una matrice diagonale che ha gli elementi diagonali uguali allo scalare. Nel caso che stiamo trattando la matrice normalizzata U'_l può essere ottenuta come il prodotto matriciale

$$U'_l = \frac{1}{l} U_l = \text{diag}\left(\frac{1}{l}, \frac{1}{l}, \dots, \frac{1}{l}\right) U_l = U_l \text{diag}\left(\frac{1}{l}, \frac{1}{l}, \dots, \frac{1}{l}\right) \equiv J_l U_l = U_l J_l,$$

dove abbiamo definito la matrice diagonale $l \times l$

$$J_l = \begin{pmatrix} 1/l & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/l & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1/l \end{pmatrix},$$

che, inoltre, essendo proporzionale alla matrice identità, commuta con U_l . La matrice J_l così ottenuta è quella cercata, ne consegue che, usando la notazione a blocchi, la matrice completa $M \times M$, J richiesta dal problema in notazione a blocchi ha la forma diagonale

$$J = \text{diag}(b_1 J_n, b_2 J_{n-1}, \dots, b_{n-1} J_2, b_n J_1, b_{n+1} J_2, \dots, b_{2n-1} J_n),$$

per ogni insieme $\{b_m\}_{m=1}^{2n-1} \subset \{0, 1\}^{2n-1}$. Ovvero, ciascuno dei $2n - 1$ blocchi, l' m -esimo ad esempio, con $m \in \{1, 2, \dots, 2n - 1\}$, può essere pesato con un coefficiente unitario o nullo, cioè $b_m = 0$ o $b_m = 1$, annullando o meno il contributo dello stesso blocco nella matrice completa. Ciò non altera la natura della matrice J , che rimane infatti un proiettore, cioè rimane una matrice hermitiana e idempotente. Questo è vero anche per il caso più semplice, quello

in cui la matrice J e quindi anche la matrice proiettore $P = \begin{pmatrix} \oplus & \\ & \oplus \end{pmatrix} J$, che rappresenta l'operatore $\hat{P} = \begin{pmatrix} \oplus & \\ & \oplus \end{pmatrix} \hat{J}$ fosse nulla, questa eventualità si verificherebbe qualora tutti i coefficienti dell'insieme $\{b_m\}_{m=1}^{2n-1}$ fossero nulli. Infine, la matrice J diagonale a blocchi, essendo gli stessi blocchi diagonali, è essa stessa diagonale e ha espressione

$$J = \text{diag} \left(\underbrace{\frac{b_1}{n}, \dots, \frac{b_1}{n}}_{n \text{ elementi}}, \underbrace{\frac{b_2}{n-1}, \dots, \frac{b_2}{n-1}}_{n-1 \text{ elementi}}, \dots, \frac{b_{n-1}}{2}, \frac{b_{n-1}}{2}, b_n, \frac{b_{n+1}}{2}, \frac{b_{n+1}}{2}, \dots, \underbrace{\frac{b_{2n-2}}{n-1}, \dots, \frac{b_{2n-2}}{n-1}}_{n-1 \text{ elementi}}, \underbrace{\frac{b_{2n-1}}{n}, \dots, \frac{b_{2n-1}}{n}}_{n \text{ elementi}} \right).$$

SESTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si calcoli la somma della serie

$$\begin{matrix} \text{🧅} \\ \circlearrowleft \end{matrix} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(p_k)}{p_k^2 + 1},$$

dove $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ è la successione dei numeri primi, in termini delle derivate logaritmiche della funzione zeta di Riemann valutate in 2 e 4, cioè in termini dei valori: $\zeta'(2)/\zeta(2)$ e $\zeta'(4)/\zeta(4)$.

Curiosità. Lo stesso gruppo di scienziate e scienziati che ha proposto e ottenuto l'inserimento del gusto *umami* tra quelli fondamentali, ha suggerito anche l'inserimento di un sesto gusto fondamentale denominato *kokumi*. Il nome è la traslitterazione della parola giapponese che significa saporito, ovvero ricco di sapore. Il gusto *kokumi* è quello conferito a un alimento da un gruppo di sostanze chimiche che ne amplificano il sapore, rendendolo più pieno e facendo sì che la struttura sia percepibile al palato in tutta la sua complessità. Alcuni esempi di sostanze chimiche con queste caratteristiche sono quelle contenute nella cipolla e nell'aglio. Il disegno della cipolla 🧅, che indica la serie del problema, rappresenta, appunto, il possibile sesto gusto, il *kokumi*.

SOLUZIONE DEL SESTO PROBLEMA

Come suggerito dal problema, prendiamo in considerazione la funzione zeta di Riemann e, poiché nella serie 🧅 compaiono i numeri primi, partiamo dalla sua rappresentazione in forma di prodotto infinito

$$\frac{1}{\zeta(z)} = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - p_k^{-z}),$$

dove $\{p_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ è la successione dei numeri primi, che ha come dominio di convergenza il semipiano delle parti reali strettamente maggiori dell'unità, ovvero $D_1 = \{z : \text{Re}(z) > 1\} \subset \mathbb{C}$. Da questa rappresentazione ricaviamo quella della derivata logaritmica. Il logaritmo è rappresentato dalla serie

$$\ln(\zeta(z)) = -\ln \left(\prod_{k=1}^{\infty} (1 - p_k^{-z}) \right) = -\sum_{k=1}^{\infty} \ln(1 - p_k^{-z}).$$

Sfruttando la convergenza uniforme in ogni sottoinsieme chiuso di D_1 , si ha che la derivata della serie coincide con la serie delle derivate, cioè

$$\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dz} \ln(1 - p_k^{-z}) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dz} \ln(1 - e^{-z \ln(p_k)}) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(p_k) e^{-z \ln(p_k)}}{1 - e^{-z \ln(p_k)}} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(p_k) p_k^{-z}}{1 - p_k^{-z}},$$

moltiplicando numeratore e denominatore per p_k^z , si arriva alla serie

$$\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(p_k)}{p_k^z - 1},$$

convergente in D_1 .

Possiamo valutare la serie in $z = 4$, uno dei valori suggeriti dal problema, fattorizzare il denominatore del k -esimo termine come $p_k^4 - 1 = (p_k^2 - 1)(p_k^2 + 1)$ e scomporre lo stesso termine nella differenza dei due aventi per denominatori

i due fattori, cioè

$$\frac{\zeta'(4)}{\zeta(4)} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(p_k)}{p_k^4 - 1} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(p_k)}{(p_k^2 - 1)(p_k^2 + 1)} = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\ln(p_k)}{p_k^2 - 1} - \frac{\ln(p_k)}{p_k^2 + 1} \right).$$

La seconda serie è quella cercata, mentre la prima è proporzionale alla derivata logaritmica della zeta di Riemann in $z = 2$, si ha

$$\frac{\zeta'(4)}{\zeta(4)} = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\ln(p_k)}{p_k^2 - 1} - \frac{\ln(p_k)}{p_k^2 + 1} \right) = \frac{1}{2} \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} + \frac{1}{2} \mathfrak{A},$$

da cui otteniamo il risultato richiesto

$$\mathfrak{A} = 2 \frac{\zeta'(4)}{\zeta(4)} - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}.$$