

METODI MATEMATICI PER LA FISICA

APPELLO STRAORDINARIO PRIMAVERILE - 22 APRILE 2025

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che il punteggio assegnato a ciascuna procedura di risoluzione può variare tra lo zero e il massimo indicato ed è stabilito valutando:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo;
6. la bellezza e l'armonia del tutto.

PRIMO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 7/30)

Si dimostri l'identità

$$\mathfrak{A} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{\cosh(x)}} = \frac{\Gamma^2(1/4)}{\sqrt{2\pi}}.$$

Curiosità. Il carattere \mathfrak{A} rappresenta la lettera "A" dell'alfabeto della popolazione extraterrestre del fumetto *Resident Alien*, degli autori statunitensi Peter Hogan e Steve Parkhouse, da cui è stata tratta l'omonima serie televisiva.

A destra le immagini delle copertine del primo, secondo, terzo e settimo volume del fumetto.



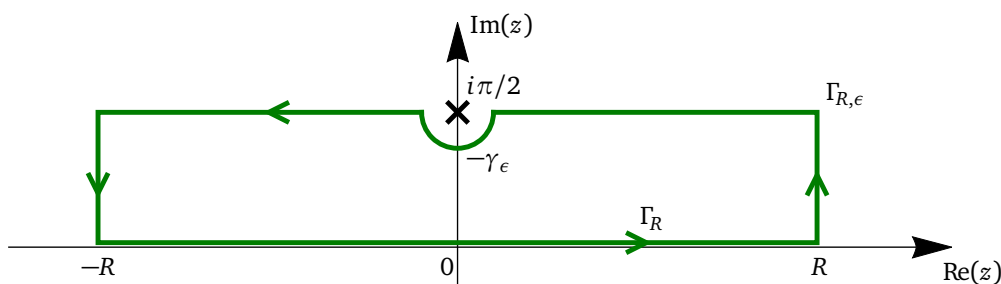
SOLUZIONE DEL PRIMO PROBLEMA

Consideriamo il percorso chiuso nel piano complesso z

$$\Gamma_{R,\epsilon} = [-R, R] \cup [R, R + i\pi/2] \cup [R + i\pi/2, \epsilon + i\pi/2] \cup (-\gamma_\epsilon) \cup [-\epsilon + i\pi/2, -R + i\pi/2] \cup [-R + i\pi/2, -R],$$

dove

$$\gamma_\epsilon = \{z : z = i\pi/2 + \epsilon e^{i\theta}, \theta \in [\pi, 2\pi]\}.$$



È il perimetro del rettangolo "dentato" internamente in $z = i\pi/2$, mostrato in figura, simmetrico rispetto all'asse immaginario con la base di lunghezza $2R$ appartenete all'asse reale e immerso nel semipiano delle parti immaginarie

positive. Nel limite $R \rightarrow \infty$, la base del rettangolo, indicata con Γ_R , converge all'asse reale e quindi all'intervallo d'integrazione dell'integrale \oint_{Γ_ϵ} . La funzione integranda è polidroma, ha punti di diramazione in corrispondenza degli zeri della funzione coseno iperbolico, cioè nei punti dell'insieme $\{p_k = (2k + 1)i\pi/2\}_{k \in \mathbb{Z}}$. Il rettangolo $\Gamma_{R,\epsilon}$ rimane nel dominio di analiticità della funzione integranda per ogni valore di $R \in \mathbb{R}$, quindi, per il teorema di Cauchy, si ha

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \oint_{\Gamma_{R,\epsilon}} \frac{dz}{\sqrt{\cosh(z)}} = 0.$$

In termini dei contributi all'integrale corrispondenti ai cinque tratti rettilinei e all'arco, la cui unione dà $\Gamma_{R,\epsilon}$, sono

$$\begin{aligned} 0 = \oint_{\Gamma_\epsilon} &+ \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(- \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{dx}{\sqrt{\cosh(x + i\pi/2)}} - \int_{-\infty}^{\epsilon} \frac{dx}{\sqrt{\cosh(x + i\pi/2)}} - \int_{\gamma_\epsilon} \frac{dz}{\sqrt{\cosh(z)}} \right) \\ &+ \lim_{R \rightarrow \infty} \left(i \int_0^{\pi/2} \frac{dy}{\sqrt{\cosh(R + iy)}} - i \int_0^{\pi/2} \frac{dy}{\sqrt{\cosh(-R + iy)}} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Dimostriamo che i contributi sull'arco γ_ϵ e sui tratti verticali sono nulli rispettivamente nei limiti $\epsilon \rightarrow 0^+$ e $R \rightarrow \infty$. Sull'arco γ_ϵ si ha $z = i\pi/2 + \epsilon e^{i\theta}$, con $\theta \in [\pi, 2\pi]$, consideriamo il limite dei valori sullo stesso arco del modulo della funzione integranda moltiplicata per $(z - i\pi/2)$, cioè

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left| \frac{z - i\pi/2}{\sqrt{\cosh(z)}} \right| = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\epsilon}{\left| \sqrt{\cosh(i\pi/2 + \epsilon e^{i\theta})} \right|} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\epsilon}{\sqrt{|\sinh(\epsilon e^{i\theta})|}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\epsilon}{\sqrt{\epsilon}} = 0,$$

questo implica che, nello stesso limite anche l'integrale sia infinitesimo, cioè

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\gamma_\epsilon} \frac{dz}{\sqrt{\cosh(z)}} = 0.$$

Il limite dei moduli dei contributi sui tratti verticali è

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_0^{\pi/2} \frac{dy}{\sqrt{\cosh(\pm R + iy)}} \right| &\leq \lim_{R \rightarrow \infty} \sqrt{2} \int_0^{\pi/2} \frac{dy}{\sqrt{|e^{\pm R + iy} + e^{\mp R - iy}|}} \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \sqrt{2} \int_0^{\pi/2} \frac{dy}{\sqrt{|e^{\pm R} - e^{\mp R}|}} \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\pi/\sqrt{2}}{\sqrt{|e^{\pm R} - e^{\mp R}|}} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\pi}{\sqrt{2}} e^{-R/2} = 0. \end{aligned}$$

Riprendendo l'espressioni di Eq. (1), si ha

$$0 = \oint_{\Gamma_\epsilon} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{\cosh(x + i\pi/2)}},$$

da cui, usando: $\cosh(x + i\pi/2) = i \sinh(x)$, si ha

$$\oint_{\Gamma_\epsilon} = \frac{1}{\sqrt{i}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{\sinh(x)}}.$$

Facciamo la sostituzione $u = e^x$, da cui: $x = \ln(u)$, $dx = du/u$, l'integrale diventa

$$\oint_{\Gamma_\epsilon} = \sqrt{\frac{2}{i}} \int_0^\infty \frac{du/u}{\sqrt{u-1/u}} = \sqrt{\frac{2}{i}} \int_0^\infty u^{-1/2} (u^2 - 1)^{-1/2} du.$$

Per ottenere la rappresentazione nella forma di integrale di Eulero di primo tipo della funzione beta di Eulero, suddividiamo l'integrale ottenuto nella somma

$$\oint_{\Gamma_\epsilon} = \sqrt{\frac{2}{i}} \int_0^1 u^{-1/2} (u^2 - 1)^{-1/2} du + \sqrt{\frac{2}{i}} \int_1^\infty u^{-1/2} (u^2 - 1)^{-1/2} du \equiv \oint_{\Gamma_1} + \oint_{\Gamma_2}.$$

Nel primo integrale \mathcal{I}_1 facciamo l'ulteriore sostituzione: $w = u^2$, con $u = w^{1/2}$, $du = w^{-1/2}dw/2$ e, dopo aver cambiato segno nell'argomento della radice quadrata, si ha

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_1 &= \sqrt{-\frac{2}{i}} \int_0^1 u^{-1/2} (1-u^2)^{-1/2} du = \frac{1}{\sqrt{-2i}} \int_0^1 w^{-3/4} (1-w)^{-1/2} dw = \frac{1}{\sqrt{-2i}} \int_0^1 w^{1/4-1} (1-w)^{1/2-1} dw \\ &= \frac{1}{\sqrt{-2i}} \beta(1/4, 1/2) = \frac{1}{\sqrt{-2i}} \frac{\Gamma(1/4)\Gamma(1/2)}{\Gamma(3/4)} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{-2i}} \frac{\Gamma(1/4)}{\Gamma(3/4)}.\end{aligned}$$

Nel secondo integrale facciamo la sostituzione: $t = 1/u^2$, $u = t^{-1/2}$, $du = -t^{-3/2}dt/2$, quindi si ha

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_2 &= \sqrt{\frac{2}{i}} \int_1^\infty u^{-1/2} (u^2-1)^{-1/2} du = -\frac{1}{\sqrt{2i}} \int_1^0 t^{-5/4} (1/t-1)^{-1/2} dt = \frac{1}{\sqrt{2i}} \int_0^1 t^{-3/4} (1-t)^{-1/2} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2i}} \int_0^1 t^{1/4-1} (1-t)^{1/2-1} dt = \frac{1}{\sqrt{2i}} \beta(1/4, 1/2) = \frac{1}{\sqrt{2i}} \frac{\Gamma(1/4)\Gamma(1/2)}{\Gamma(3/4)} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2i}} \frac{\Gamma(1/4)}{\Gamma(3/4)}.\end{aligned}$$

La somma dei due integrali così ottenuti è

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\Gamma(1/4)}{\Gamma(3/4)} ((-i)^{-1/2} + i^{-1/2}) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\Gamma(1/4)}{\Gamma(3/4)} 2 \operatorname{Re}(i^{-1/2}) = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(1/4)}{\Gamma(3/4)}.$$

Usiamo, infine, la formula di riflessione della funzione gamma di Eulero

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(z\pi)},$$

con $z = 1/4$, cioè

$$\Gamma(1/4)\Gamma(3/4) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi/4)} = \pi\sqrt{2},$$

quindi

$$\Gamma(3/4) = \frac{\pi\sqrt{2}}{\Gamma(1/4)},$$

che, a sua volta, sostituito nell'espressione precedente dell'integrale \mathcal{I} , dà

$$\mathcal{I} = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma^2(1/4)}{\pi\sqrt{2}}.$$

Il risultato finale è

$$\mathcal{I} = \frac{\Gamma^2(1/4)}{\sqrt{2\pi}}.$$

SECONDO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$\Phi(a, b, c) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(at)\operatorname{sen}(bt)\operatorname{sen}(ct)}{t^3} dt,$$

con $a, b, c \in (0, \infty)$ e tali che: $a > b + c > 0$.

Curiosità. Il carattere Φ rappresenta la lettera "B" dell'alfabeto descritto nel primo problema.

SOLUZIONE DEL SECONDO PROBLEMA

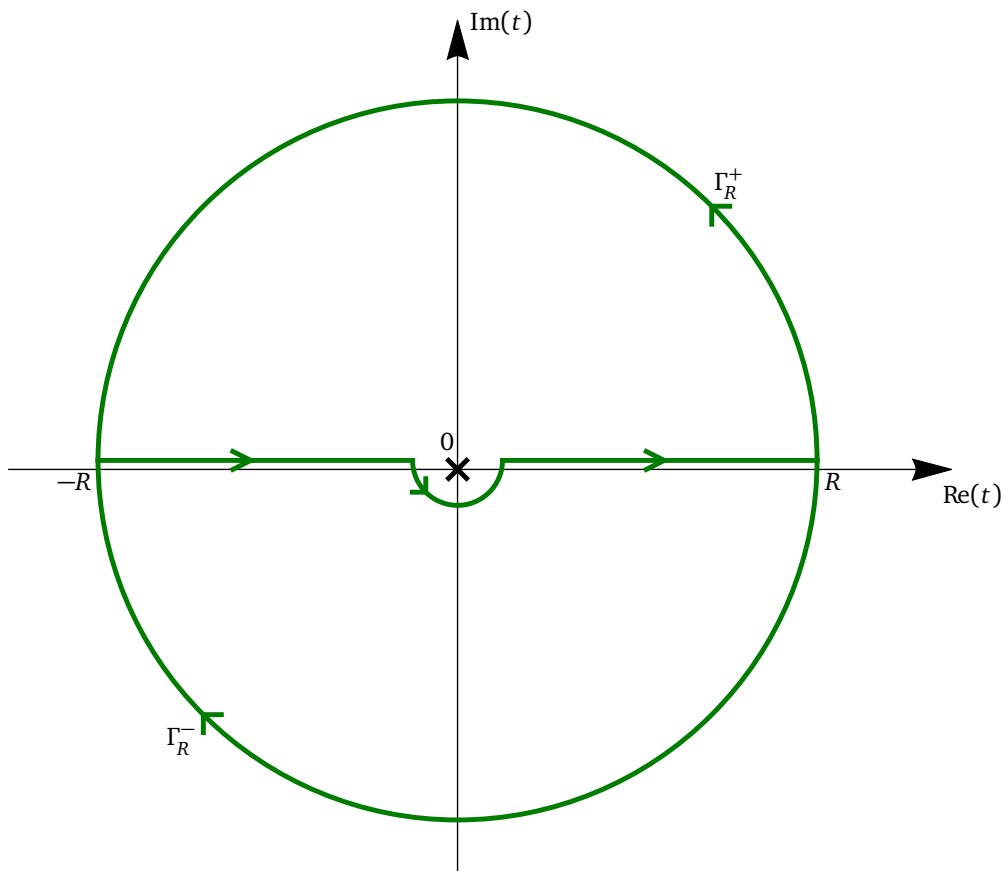
La funzione integranda ha una singolarità eliminabile nell'origine, infatti

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(at) \text{sen}(bt) \text{sen}(ct)}{t^3} = abc.$$

Consegue che è possibile deformare con continuità il percorso d'integrazione senza alterare il valore dell'integrale, passando dall'asse reale $(-\infty, \infty)$ all'asse reale "dentato" in corrispondenza dell'origine, che indichiamo con Γ e quindi a un'integrazione nel piano complesso t . Il percorso dentato Γ aggira l'origine con una semicirconfenza di raggio infinitesimo ϵ immersa nel semipiano delle parti immaginarie negative, si ha cioè

$$\Gamma = (-\infty, -\epsilon] \cup \{z : z = \epsilon e^{i\theta}, \theta \in [\pi, 2\pi]\} \cup [\epsilon, \infty).$$

Una parte finita del percorso Γ è mostrata nella figura sottostante ed è costituita dall'unione dei due tratti rettilinei lungo l'asse reale a dalla semicirconfenza che, aggirando l'origine nel semipiano delle parti immaginarie negative, li connette.



Riscriviamo la funzione integranda usando la formula di Eulero per le funzioni seno, si ha

$$\begin{aligned} \Phi(a, b, c) &= \frac{1}{(2i)^3} \int_{\Gamma} \frac{(e^{iat} - e^{-iat})(e^{ibt} - e^{-ibt})(e^{ict} - e^{-ict})}{t^3} dt \\ &= \frac{1}{(2i)^3} \int_{\Gamma} \left(e^{i(a+b+c)t} - e^{i(a+b-c)t} - e^{i(a-b+c)t} + e^{i(a-b-c)t} \right. \\ &\quad \left. - e^{i(-a+b+c)t} + e^{i(-a+b-c)t} + e^{i(-a-b+c)t} - e^{i(-a-b-c)t} \right) \frac{dt}{t^3}. \end{aligned}$$

In base alle condizioni del problema riguardo i numeri positivi a , b e c , si hanno:

$$\begin{aligned} (a + b + c), (a + b - c), (a - b + c), (a - b - c) &> 0, \\ (-a - b - c), (-a - b + c), (-a + b - c), (-a + b + c) &< 0. \end{aligned}$$

Usiamo, quindi, il lemma di Jordan, chiudendo il percorso nel semipiano delle parti immaginarie positive per i primi quattro contributi, negative per gli ultimi quattro, considerando rispettivamente i percorsi chiusi Γ_R^+ e Γ_R^- mostrati nella figura della pagina precedente, cioè

$$\begin{aligned}\Gamma_R^+ &= (-R, -\epsilon] \cup \{z : z = \epsilon e^{i\theta}, \theta \in [\pi, 2\pi i]\} \cup [\epsilon, R) \cup \{z : z = R e^{i\theta}, \theta \in [0, \pi]\}, \\ \Gamma_R^- &= (-R, -\epsilon] \cup \{z : z = \epsilon e^{i\theta}, \theta \in [\pi, 2\pi i]\} \cup [\epsilon, R) \cup (-\{z : z = R e^{i\theta}, \theta \in [\pi, 2\pi]\}).\end{aligned}$$

I due percorsi hanno il tratto lungo l'asse reale in comune. Nel limite $R \rightarrow \infty$ i contributi sugli archi di raggio R si annullano, cosicch 

$$\begin{aligned}\Phi(a, b, c) &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{(2i)^3} \left(\oint_{\Gamma_R^+} \frac{e^{i(a+b+c)t} - e^{i(a+b-c)t} - e^{i(a-b+c)t} + e^{i(a-b-c)t}}{t^3} dt \right. \\ &\quad \left. + \oint_{\Gamma_R^-} \frac{-e^{i(-a+b+c)t} + e^{i(-a+b-c)t} + e^{i(-a-b+c)t} - e^{i(-a-b-c)t}}{t^3} dt \right).\end{aligned}$$

I due integrali sui percorsi chiusi si calcolano con il teorema dei residui. Per quello sul percorso Γ_R^+ , che avvolge l'origine, si ha

$$\begin{aligned}& \frac{1}{(2i)^3} \oint_{\Gamma_R^+} \frac{e^{i(a+b+c)t} - e^{i(a+b-c)t} - e^{i(a-b+c)t} + e^{i(a-b-c)t}}{t^3} dt \\ &= \frac{2i\pi}{(2i)^3} \operatorname{Res} \left[\frac{e^{i(a+b+c)t} - e^{i(a+b-c)t} - e^{i(a-b+c)t} + e^{i(a-b-c)t}}{t^3}, 0 \right].\end{aligned}$$

La funzione integranda ha nell'origine un polo di ordine tre, quindi il residuo   dato dalla derivata seconda del numeratore, ovvero della funzione integranda moltiplicata per t^3 , divisa per $2!$ e valutata nell'origine, cio 

$$\begin{aligned}& \frac{1}{(2i)^3} \oint_{\Gamma_R^+} \frac{e^{i(a+b+c)t} - e^{i(a+b-c)t} - e^{i(a-b+c)t} + e^{i(a-b-c)t}}{t^3} dt \\ &= -\frac{\pi}{4} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dt^2} \left(e^{i(a+b+c)t} - e^{i(a+b-c)t} - e^{i(a-b+c)t} + e^{i(a-b-c)t} \right) \Big|_0 \\ &= -\frac{\pi}{8} \left(-(a+b+c)^2 + (a+b-c)^2 + (a-b+c)^2 - (a-b-c)^2 \right),\end{aligned}$$

tutti i quadrati e i doppi prodotti contenenti la a si elidono, rimangono, sommandosi, solo i doppi prodotti $2bc$, ce ne sono quattro e, all'interno della parentesi hanno il segno meno, quindi l'integrale vale

$$\frac{1}{(2i)^3} \oint_{\Gamma_R^+} \frac{e^{i(a+b+c)t} - e^{i(a+b-c)t} - e^{i(a-b+c)t} + e^{i(a-b-c)t}}{t^3} dt = \pi bc,$$

e non dipende dal raggio R .

Il secondo integrale, sul percorso Γ_R^-   nullo, poich  la funzione integranda ha, come nel caso precedente, una sola singolarit , un polo triplo nell'origine, che, per  non   avvolto dal percorso d'integrazione, si ha cio 

$$\frac{1}{(2i)^3} \oint_{\Gamma_R^-} \frac{-e^{i(-a+b+c)t} + e^{i(-a+b-c)t} + e^{i(-a-b+c)t} - e^{i(-a-b-c)t}}{t^3} dt = 0.$$

Esplicitamente e in modo forse un po' ridondante si ha

$$\begin{aligned}\Phi(a, b, c) &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{(2i)^3} \left(\oint_{\Gamma_R^+} \frac{e^{i(a+b+c)t} - e^{i(a+b-c)t} - e^{i(a-b+c)t} + e^{i(a-b-c)t}}{t^3} dt \right. \\ &\quad \left. + \oint_{\Gamma_R^-} \frac{-e^{i(-a+b+c)t} + e^{i(-a+b-c)t} + e^{i(-a-b+c)t} - e^{i(-a-b-c)t}}{t^3} dt \right) \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} (\pi bc + 0),\end{aligned}$$

quindi il risultato finale è

$$\Phi(b, c) = \pi bc,$$

dove si è soppressa la dipendenza dal parametro a , in quanto, appunto, nelle condizioni del problema, tale risultato è indipendente dai valori a .

TERZO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si ottenga la serie di Laurent centrata in $z_0 = 1$ e con dominio di convergenza finito della funzione

$$\mathfrak{L}_n(z) = \sum_{j=1}^n z^{-j},$$

con $n \in \mathbb{N}$.

Curiosità. Il carattere \mathfrak{L} rappresenta la lettera “L” dell’alfabeto descritto nel primo problema.

SOLUZIONE DEL TERZO PROBLEMA

La funzione $\mathfrak{L}_n(z)$, per ogni $n \in \mathbb{N}$, è meromorfa, in quanto somma di n funzioni meromorfe e ha una sola singolarità, si tratta di un polo di ordine n nell’origine. Infatti, la funzione coincide con la sua serie di Laurent centrata nell’origine, tale serie ha solo la parte principale e di questa solo i coefficienti con indici compresi tra $-n$ e -1 sono diversi da zero e tutti uguali all’unità. Da ciò si evincono, sia la natura polare dell’unica singolarità, che l’ordine della stessa. Nell’intorno dell’unità, centro della serie richiesta, la funzione è analitica, quindi la serie di Laurent si riduce a quella di Taylor, ovvero i coefficienti con indici negativi sono nulli. Il dominio di convergenza è il disco centrato in $z_0 = 1$, con raggio unitario,

$$D = \{z : |z - 1| < 1\}.$$

Il raggio è la distanza del centro, $z_0 = 1$, dall’unica singolarità, che è l’origine $z = 0$.

Consideriamo il j -esimo termine della somma che costituisce la funzione $\mathfrak{L}_n(z)$,

$$\frac{1}{z^j} = \frac{1}{(1 - (1 - z))^j}, \quad \text{con: } j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

e usiamo la somma della serie geometrica per esprimere questa potenza inversa. Infatti, indicando con α la ragione della serie geometrica, nella condizione di convergenza: $|\alpha| < 1$, si ha

$$\frac{1}{1 - \alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k,$$

derivando $j - 1$ volte ambo i membri e, in particolare, il secondo termine a termine, otteniamo

$$\frac{d^{j-1}}{d\alpha^{j-1}} \frac{1}{1 - \alpha} = \frac{(j-1)!}{(1 - \alpha)^j} = \frac{d^{j-1}}{d\alpha^{j-1}} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k = \sum_{k=j-1}^{\infty} k(k-1) \cdots (k-j+2) \alpha^{k-j+1} = \sum_{k=j-1}^{\infty} \frac{k!}{(k-j+1)!} \alpha^{k-j+1}.$$

Consegue che, usando l’espressione del coefficiente binomiale e facendo un cambiamento di indice

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1 - \alpha)^j} &= \sum_{k=j-1}^{\infty} \frac{k!}{(k-j+1)!(j-1)!} \alpha^{k-j+1} = \sum_{k=j-1}^{\infty} \binom{k}{j-1} \alpha^{k-j+1} = \{m = k - j + 1\} = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+j-1}{j-1} \alpha^m \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+j-1}{m} \alpha^m, \quad \text{con: } j \in \{1, 2, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Per le potenze inverse della funzione data, con $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, si hanno le espressioni

$$\frac{1}{z^j} = \frac{1}{(1 - (1 - z))^j} = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+j-1}{m} (1 - z)^m = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \binom{m+j-1}{m} (z - 1)^m.$$

Queste serie sono convergenti in D , poiché, $\forall z \in D$, si ha $|z - 1| < 1$. Per la funzione completa, avremo

$$\mathfrak{M}_n(z) = \sum_{j=1}^n z^{-j} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{(1 - (1 - z))^j} = \sum_{j=1}^n \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \binom{m+j-1}{m} (z-1)^m = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \underbrace{\sum_{j=1}^n \binom{m+j-1}{m}}_{=C_m} (z-1)^m.$$

In generale, possiamo scrivere

$$\mathfrak{M}_n(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m (z-a)^m,$$

con i coefficienti di Laurent dati dalla legge multipla, $\forall m \in \mathbb{Z}$,

$$C_m = \begin{cases} (-1)^m \sum_{j=1}^n \binom{m+j-1}{m} & \forall m \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

QUARTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Gli operatori \hat{A} e \hat{B} sono definiti nello spazio di Hilbert E_N a dimensione finita $N \in \mathbb{N}$, sapendo che l'operatore \hat{A} è normale e che i due operatori commutano, cioè si ha

$$[\hat{A}, \hat{B}] = 0,$$

si dimostri che l'operatore \hat{A} commuta anche con l'aggiunto dell'operatore \hat{B} , ovvero che si ha anche

$$[\hat{A}, \hat{B}^\dagger] = 0.$$

SOLUZIONE DEL QUARTO PROBLEMA

Un operatore è normale quando commuta con il suo aggiunto hermitiano, perciò, per ipotesi,

$$[\hat{A}, \hat{A}^\dagger] = 0.$$

Inoltre, un operatore normale è diagonalizzabile e ammette un insieme ortonormale di autovettori. Indichiamo con $\{|a_k\rangle\}_{k=1}^N \subset E_N$, l'insieme degli autovettori dell'operatore \hat{A} . Si hanno le N equazioni agli autovalori

$$\hat{A}|a_k\rangle = \alpha_k|a_k\rangle, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, N\},$$

dove $\{\alpha_k\}_{k=1}^N$ è l'insieme degli autovalori dello stesso operatore \hat{A} . Poiché gli operatori \hat{A} e \hat{A}^\dagger commutano, sono diagonalizzabili simultaneamente, ammettono quindi lo stesso insieme di autovettori, cioè

$$\hat{A}^\dagger|a_k\rangle = \tilde{\alpha}_k|a_k\rangle, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, N\},$$

dove $\{\tilde{\alpha}_k\}_{k=1}^N$ è l'insieme degli autovalori dell'operatore aggiunto \hat{A}^\dagger . È immediato verificare che gli autovalori omologhi α_k e $\tilde{\alpha}_k$, con $k \in \{1, 2, \dots, N\}$ sono gli uni i complessi coniugati degli altri. Infatti, moltiplicando a destra per il vettore ket $|a_k\rangle$ la duale della k -esima equazione agli autovalori dell'operatore \hat{A} , con $k \in \{1, 2, \dots, N\}$, si ha

$$\langle a_k | \hat{A}^\dagger | a_k \rangle = \alpha_k^* \langle a_k | a_k \rangle,$$

mentre la k -esima equazione agli autovalori dell'operatore \hat{A}^\dagger , moltiplicata a sinistra per il vettore bra $\langle a_k |$ è

$$\langle a_k | \hat{A}^\dagger | a_k \rangle = \tilde{\alpha}_k \langle a_k | a_k \rangle,$$

da cui, sottraendo membro a membro e avendo che il prodotto scalare $\langle a_k | a_k \rangle$ è sempre strettamente positivo, poiché $|0\rangle \notin \{|a_k\rangle\}_{k=1}^N$, si ottiene la relazione desiderata

$$0 = \alpha_k^* - \tilde{\alpha}_k \quad \Rightarrow \quad \tilde{\alpha}_k = \alpha_k^*, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

Dalla condizione di commutazione data per ipotesi,

$$[\hat{A}, \hat{B}] = 0,$$

segue, applicando il commutatore sul generico k -esimo autovettore,

$$[\hat{A}, \hat{B}]|a_k\rangle = |0\rangle \quad \Rightarrow \quad \hat{A}\hat{B}|a_k\rangle = \hat{B}\hat{A}|a_k\rangle = \alpha_k \hat{B}|a_k\rangle, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

Dall'ultima equazione si evince che il vettore $\hat{B}|a_k\rangle$ è autovettore dell'operatore \hat{A} con autovalore α_k , $\forall k \in \{1, 2, \dots, N\}$. Poiché gli operatori \hat{A} e \hat{A}^\dagger sono diagonalizzabili simultaneamente, i vettori dell'insieme $\{\hat{B}|a_k\rangle\}_{k=1}^N$ sono autovettori anche dell'operatore aggiunto \hat{A}^\dagger , si hanno quindi le equazioni agli autovalori

$$\hat{A}^\dagger \hat{B}|a_k\rangle = \rho_k \hat{B}|a_k\rangle, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, N\},$$

dove ρ_k è l'autovalore dell'operatore \hat{A}^\dagger relativo al k -esimo autovettore $\hat{B}|a_k\rangle$. Ma, così come abbiamo dimostrato che gli autovalori relativi allo stesso k -esimo autovettore $|a_k\rangle$ degli operatori \hat{A}^\dagger e \hat{A} sono l'uno il complesso coniugato dell'altro, cioè $\tilde{\alpha}_k = \alpha_k^*$, $\forall k \in \{1, 2, \dots, N\}$, si ha lo stesso per il k -esimo autovettore $\hat{B}|a_k\rangle$, quindi $\rho_k = \alpha_k^*$, cioè $\rho_k = \tilde{\alpha}_k$. L'equazione precedente diventa

$$\hat{A}^\dagger \hat{B}|a_k\rangle = \alpha_k^* \hat{B}|a_k\rangle, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

Consideriamo l'azione dell'operatore $\hat{B}\hat{A}^\dagger$ sul k -esimo autovettore $|a_k\rangle$, si ha

$$\hat{B}\hat{A}^\dagger|a_k\rangle = \hat{B}\tilde{\alpha}_k|a_k\rangle = \alpha_k^* \hat{B}|a_k\rangle, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

Sottraendo membro a membro le precedenti equazioni si ottiene

$$(\hat{A}^\dagger \hat{B} - \hat{B}\hat{A}^\dagger)|a_k\rangle = [\hat{A}^\dagger, \hat{B}]|a_k\rangle = |0\rangle, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

Poiché l'insieme degli autovettori $\{|a_k\rangle\}_{k=1}^N$ è ortonormale, esso rappresenta una base dello spazio vettoriale, allora il fatto che l'azione del commutatore su tutti i vettori della base dia il vettore nullo equivale all'annullamento del commutatore, cioè

$$[\hat{A}^\dagger, \hat{B}] = 0.$$

È nullo anche l'aggiunto del commutatore,

$$0 = [\hat{A}^\dagger, \hat{B}]^\dagger = (\hat{A}^\dagger \hat{B})^\dagger - (\hat{B}\hat{A}^\dagger)^\dagger = \hat{B}^\dagger \hat{A} - \hat{A}\hat{B}^\dagger = [\hat{B}^\dagger, \hat{A}].$$

Ovvero, come volevasi dimostrare, anche l'aggiunto dell'operatore \hat{B}, \hat{B}^\dagger , commuta con l'operatore \hat{A} .

QUINTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si dimostri che l'operatore \hat{A} , definito nello spazio di Hilbert H_N di dimensione $N \in \mathbb{N}$ è normale, se e solo se esiste un polinomio $Q(z)$, tale che: $\hat{A}^\dagger = \hat{Q}(\hat{A})$.

SOLUZIONE DEL QUINTO PROBLEMA

Iniziamo con la condizione necessaria. Abbiamo per ipotesi che l'operatore è normale e dimostriamo l'esistenza del polinomio $Q(z)$.

Un operatore normale è diagonalizzabile e, avvalendosi del teorema spettrale, si può esprimere come

$$\hat{A} = \sum_{k=1}^N \alpha_k \hat{P}_k,$$

dove $\{\alpha_k\}_{k=1}^N$ è l'insieme dei suoi autovalori e $\{\hat{P}_k\}_{k=1}^N$ è un insieme di proiettori ortogonali, tali che

$$\sum_{k=1}^N \hat{P}_k = \hat{I},$$

dove \hat{I} è l'operatore identità. Poiché l'operatore è normale, l'insieme dei suoi autovettori $\{|a_k\rangle\}_{k=1}^N$ è ortonormale e il k -esimo proiettore può essere definito come

$$\hat{P}_k = |a_k\rangle\langle a_k|, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

Inoltre, l'operatore commuta con il suo aggiunto \hat{A}^\dagger , che è, quindi, diagonalizzabile simultaneamente allo stesso operatore \hat{A} , ovvero ammette gli stessi autovettori. Ciò implica che la sua rappresentazione spettrale è fatta con lo stesso insieme di proiettori e quindi gli autovalori sono i complessi coniugati degli omologhi dell'operatore \hat{A} , cioè

$$\hat{A}^\dagger = \sum_{k=1}^N \alpha_k^* \hat{P}_k.$$

In generale, l'operatore che si ottiene valutando il polinomio $Q(z)$ su un operatore diagonalizzabile ha una rappresentazione spettrale fatta con gli stessi proiettori, in quanto ha gli stessi autovettori, mentre gli autovalori sono i valori che il polinomio assume sugli autovalori originali, cioè

$$\hat{Q}(\hat{A}) = \sum_{k=1}^N Q(\alpha_k) \hat{P}_k.$$

Ne consegue che il polinomio che verifica l'identità richiesta $\hat{A}^\dagger = \hat{Q}(\hat{A})$, deve essere tale che

$$\hat{A}^\dagger = \sum_{k=1}^N \alpha_k^* \hat{P}_k = \hat{Q}(\hat{A}) = \sum_{k=1}^N Q(\alpha_k) \hat{P}_k,$$

che implica

$$Q(\alpha_k) = \alpha_k^*, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

Consideriamo gli N polinomi

$$q_j(z) = \prod_{k \neq j} \frac{z - \alpha_k}{\alpha_j - \alpha_k} \alpha_j^*, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, N\},$$

sono di grado $N-1$ e il j -esimo ha come zeri gli $N-1$ autovalori diversi da α_j . Inoltre, se valutato in α_j , il polinomio vale α_j^* . Si ha cioè

$$q_j(\alpha_k) = \begin{cases} \alpha_j^* & k = j \\ 0 & k \neq j \end{cases}, \quad \forall j, k \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

La somma di questi polinomi, cioè di quelli dell'insieme $\{q_j(z)\}_{j=1}^N$,

$$Q(z) \equiv \sum_{j=1}^N q_j(z)$$

è ancora un polinomio di grado $N - 1$ e tale che, se valutato sugli autovalori dell'insieme $\{\alpha_k\}_{k=1}^N$, dà

$$Q(\alpha_k) \equiv \sum_{j=1}^N q_j(\alpha_k) = q_k(\alpha_k) = \alpha_k^*, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

Il polinomio così definito è quello cercato e la condizione necessaria è quindi dimostrata.

La condizione sufficiente ha come ipotesi l'esistenza del polinomio $Q(z)$, tale che $\hat{\mathbf{A}}^\dagger = \hat{Q}(\hat{\mathbf{A}})$ e dobbiamo dimostrare che l'operatore $\hat{\mathbf{A}}$ è normale. Esprimiamo il polinomio nella forma

$$Q(z) = \sum_{m=0}^M c_m z^m,$$

dove $M \in \mathbb{N}$ è il grado e $\{c_m\}_{m=0}^M \subset \mathbb{C}$, con $c_M \neq 0$, è l'insieme dei coefficienti. Usando questa espressione, calcoliamo il commutatore $[\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{A}}^\dagger]$. Si ha, sfruttando la linearità del commutatore,

$$[\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{A}}^\dagger] = [\hat{\mathbf{A}}, \hat{Q}(\hat{\mathbf{A}})] = \left[\hat{\mathbf{A}}, \sum_{m=0}^M c_m \hat{\mathbf{A}}^m \right] = \sum_{m=0}^M c_m \underbrace{[\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{A}}^m]}_{=0} = 0,$$

l'annullamento consegue dal fatto che, come indicato, tutti i commutatori della somma sono nulli, poiché un operatore commuta con l'operatore che si ottiene da ogni sua potenza intera. In definitiva, l'operatore $\hat{\mathbf{A}}$, commutando con il suo aggiunto, è un operatore normale. Abbiamo così dimostrato la condizione sufficiente.

SESTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

L'operatore $\hat{\mathcal{S}}$ è definito nello spazio di Hilbert R dall'azione

$$\hat{\mathcal{S}}|x\rangle = \hat{P}|x\rangle + |y\rangle,$$

su un generico vettore $|x\rangle \in R$, dove il vettore $|y\rangle \in R$ è fissato e

$$\hat{P} = \frac{|p\rangle\langle p|}{\langle p|p\rangle},$$

con $|p\rangle \in R \setminus \{|0\rangle\}$.

Si ottenga, in termini dei vettori $|y\rangle$ e $|p\rangle$, e dello scalare λ , l'espressione del vettore $|s\rangle \in R$, che verifica l'indennità

$$\hat{\mathcal{S}}|s\rangle = \lambda|s\rangle, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

SOLUZIONE DEL SESTO PROBLEMA

L'equazione per il vettore $|s\rangle$ ha la forma

$$\hat{\mathcal{S}}|s\rangle = \hat{P}|s\rangle + |y\rangle = \lambda|s\rangle.$$

La riscriviamo come

$$(\lambda\hat{I} - \hat{P})|s\rangle = |y\rangle \quad \Rightarrow \quad (\hat{I} - \lambda^{-1}\hat{P})|s\rangle = \lambda^{-1}|y\rangle.$$

Il vettore cercato può essere ottenuto applicando su ambo i membri dell'ultima identità l'operatore inverso $(\hat{I} - \lambda^{-1}\hat{P})^{-1}$ e si ha

$$|s\rangle = \lambda^{-1}(\hat{I} - \lambda^{-1}\hat{P})^{-1}|y\rangle.$$

L'operatore inverso esiste se si verifica la condizione

$$\|\lambda^{-1}\hat{P}\| = |\lambda|^{-1}\|P\| < 1$$

e si ottiene come la somma della serie geometrica

$$(\hat{I} - \lambda^{-1}\hat{P})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k} \hat{P}^k.$$

L'operatore \hat{P} è un proiettore e, come tale, è hermitiano e idempotente, cioè

$$\hat{P}^\dagger = \left(\frac{|p\rangle\langle p|}{\langle p|p\rangle} \right)^\dagger = \frac{|p\rangle\langle p|}{\langle p|p\rangle}, \quad \hat{P}^2 = \left(\frac{|p\rangle\langle p|}{\langle p|p\rangle} \right)^2 = \frac{|p\rangle\langle p|p\rangle\langle p|}{(\langle p|p\rangle)^2} = \frac{|p\rangle\langle p|}{\langle p|p\rangle} = \hat{P}.$$

Usando queste proprietà, possiamo calcolare la somma della serie operatoriale che definisce l'operatore inverso come

$$(\hat{I} - \lambda^{-1}\hat{P})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k} \hat{P}^k = \hat{I} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{-k} \hat{P}^k = \hat{I} + \hat{P} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{-k} = \hat{I} + \lambda^{-1}\hat{P} \sum_{k'=0}^{\infty} \lambda^{-k'},$$

dove abbiamo fatto il cambiamento di indice $k' = k - 1$. La serie geometrica di ragione λ^{-1} converge se $|\lambda|^{-1} < 1$, che è la condizione precedentemente richiesta, avendo $\|P\| = 1$. L'operatore inverso ha la forma

$$(\hat{I} - \lambda^{-1}\hat{P})^{-1} = \hat{I} + \frac{\lambda^{-1}}{1 - \lambda^{-1}} \hat{P} = \hat{I} + \frac{1}{\lambda - 1} \hat{P}.$$

Questo risultato, avendo sommato la serie, vale nel dominio massimale del parametro λ per cui l'espressione è analitica, cioè: $\forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, si ricordi che l'origine era già esclusa.

Il vettore $|s\rangle$ soluzione dell'equazione vettoriale si ottiene dall'azione seguente

$$|s\rangle = \lambda^{-1} (\hat{I} - \lambda^{-1}\hat{P})^{-1} |y\rangle = \lambda^{-1} \left(\hat{I} + \frac{1}{\lambda - 1} \hat{P} \right) |y\rangle = \lambda^{-1} \left(\hat{I} + \frac{1}{\lambda - 1} \frac{|p\rangle\langle p|}{\langle p|p\rangle} \right) |y\rangle$$

e, in definitiva,

$$|s\rangle = \frac{1}{\lambda} |y\rangle + \frac{\langle p|y\rangle}{\lambda(\lambda - 1)\langle p|p\rangle} |p\rangle.$$

Verifichiamo il risultato, applicando a questo vettore l'operatore $\hat{\mathcal{G}}$,

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{G}}|s\rangle &= \hat{\mathcal{G}} \left(\frac{1}{\lambda} |y\rangle + \frac{\langle p|y\rangle}{\lambda(\lambda - 1)\langle p|p\rangle} |p\rangle \right) = \hat{P} \left(\frac{1}{\lambda} |y\rangle + \frac{\langle p|y\rangle}{\lambda(\lambda - 1)\langle p|p\rangle} |p\rangle \right) + |y\rangle \\ &= \frac{|p\rangle\langle p|}{\langle p|p\rangle} \left(\frac{1}{\lambda} |y\rangle + \frac{\langle p|y\rangle}{\lambda(\lambda - 1)\langle p|p\rangle} |p\rangle \right) + |y\rangle = \frac{1}{\lambda(\lambda - 1)} \frac{1}{\langle p|p\rangle} \left((\lambda - 1)\langle p|y\rangle |p\rangle + \langle p|y\rangle |p\rangle \right) + |y\rangle \\ &= \frac{\langle p|y\rangle}{(\lambda - 1)\langle p|p\rangle} |p\rangle + |y\rangle = \lambda \left(\frac{\langle p|y\rangle}{\lambda(\lambda - 1)\langle p|p\rangle} |p\rangle + \frac{1}{\lambda} |y\rangle \right) = \lambda \left(\frac{1}{\lambda} |y\rangle + \frac{\langle p|y\rangle}{\lambda(\lambda - 1)\langle p|p\rangle} |p\rangle \right) \\ &= \lambda |s\rangle, \end{aligned}$$

si ottiene l'equazione richiesta, il vettore $|s\rangle$ è la soluzione richiesta.