

METODI MATEMATICI PER LA FISICA

APPELLO STRAORDINARIO INVERNALE - 21 DICEMBRE 2023

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che il punteggio assegnato a ciascuna procedura di risoluzione può variare tra lo zero e il massimo indicato ed è stabilito valutando:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo.

PRIMO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Dopo aver definito il dominio di convergenza D_u nel piano complesso u della rappresentazione integrale

$$\zeta(u) = \int_0^{\pi/2} \cos^u(b) \sin^{2-u}(b) db,$$

si ottenga il prolungamento analitico della funzione $\zeta(u)$ nel dominio naturale di analiticità ovvero la sua espressione analitica.

SOLUZIONE DEL PRIMO PROBLEMA

Consideriamo la rappresentazione integrale della funzione beta di Eulero

$$\beta(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt,$$

è un integrale di primo tipo di Eulero e converge in

$$\mathcal{D} = \{(p, q) : (\operatorname{Re}(p), \operatorname{Re}(q)) \in (0, \infty)^2\} \subset \mathbb{C}^2.$$

Con il cambiamento di variabile $t = \cos^2(\alpha)$, si ha

$$\beta(p, q) = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^{2p-1}(\alpha) \sin^{2q-1}(\alpha) d\alpha.$$

Confrontando questa espressione con la rappresentazione della funzione $\zeta(u)$, si evince che quest'ultima coincide con metà della rappresentazione della funzione in $p = (u+1)/2$ e $q = (3-u)/2$. Quindi, le condizioni di convergenza sono

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{Re}(p) = \operatorname{Re}\left(\frac{u+1}{2}\right) > 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Re}(u) > -1, \\ \operatorname{Re}(q) = \operatorname{Re}\left(\frac{3-u}{2}\right) > 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Re}(u) < 3, \end{array} \right\} \Rightarrow \quad -1 < \operatorname{Re}(u) < 3.$$

Il Dominio di convergenza richiesto è $D_u \{u : -1 < \operatorname{Re}(u) < 3\} \subset \mathbb{C}$.

Sfruttiamo l'espressione della funzione beta in termini di funzione gamma di Eulero per ottenerne la continuazione analitica, ovvero

$$\beta(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad \Rightarrow \quad \zeta(u) = \frac{1}{2} \beta\left(\frac{u+1}{2}, \frac{3-u}{2}\right) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{u+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3-u}{2}\right) \frac{1}{\Gamma(2)}.$$

Usando $\Gamma(2) = 1$ e l'equazione di ricorrenza $\Gamma(z) = (z-1)\Gamma(z-1)$, si ha

$$\begin{aligned} \square(u) &= \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{u+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{4-(1+u)}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{u+1}{2}\right)\Gamma\left(2-\frac{u+1}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{u+1}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{u+1}{2}\right)\left(1-\frac{u+1}{2}\right) \\ &= \Gamma\left(\frac{u+1}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{u+1}{2}\right)\frac{1-u}{4}. \end{aligned}$$

Il prodotto delle funzioni gamma può essere espresso con la formula di riflessione della funzione gamma

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)},$$

con $z = (u+1)/2$ e si ha

$$\square(u) = \Gamma\left(\frac{u+1}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{u+1}{2}\right)\frac{1-u}{4} = \frac{1-u}{4} \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi u/2 + \pi/2)},$$

da cui l'espressione analitica richiesta

$$\square(u) = \frac{\pi}{4} \frac{1-u}{\cos(\pi u/2)}.$$

SECONDO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$\Delta = \oint_{|z-3i|=4} \frac{dz}{\operatorname{senh}^7(z)}.$$

SOLUZIONE DEL SECONDO PROBLEMA

La funzione integranda è meromorfa, ha poli di ordine 7 nei punti dell'insieme $\{z_k = ik\pi\}_{k \in \mathbb{Z}}$. La circonferenza di centro $z = 3i$ e raggio 4 che rappresenta il percorso d'integrazione avvolge una sola volta i tre poli $z_0 = 0$, $z_1 = i\pi$ e $z_2 = 2i\pi$. Infatti si hanno le condizioni: $|z_{0,1,2} - 3i| = 3, \pi - 3, 2\pi - 3 < 4$; mentre per z_{-1} e z_3 , $|z_{-1,3} - 3i| = \pi + 1, 3\pi - 3 > 4$. Ne consegue che l'integrale cercato è proporzionale alla somma dei tre residui nei punti z_0, z_1 e z_2 , ovvero

$$\Delta = 2i\pi \left(\operatorname{Res} \left[\frac{1}{\operatorname{senh}^7(z)}, z_0 = 0 \right] + \operatorname{Res} \left[\frac{1}{\operatorname{senh}^7(z)}, z_1 = i\pi \right] + \operatorname{Res} \left[\frac{1}{\operatorname{senh}^7(z)}, z_2 = 2i\pi \right] \right).$$

In virtù della periodicità della funzione seno iperbolico,

$$\operatorname{senh}(z + z_1) = \operatorname{senh}(z + i\pi) = -\operatorname{senh}(z), \quad \operatorname{senh}(z + z_2) = \operatorname{senh}(z + 2i\pi) = \operatorname{senh}(z),$$

per i residui si ha la relazione

$$\operatorname{Res} \left[\frac{1}{\operatorname{senh}^7(z)}, z_2 \right] = -\operatorname{Res} \left[\frac{1}{\operatorname{senh}^7(z)}, z_1 \right] = \operatorname{Res} \left[\frac{1}{\operatorname{senh}^7(z)}, z_0 \right],$$

quindi

$$\Delta = 2i\pi \operatorname{Res} \left[\frac{1}{\operatorname{senh}^7(z)}, z_0 \right].$$

Calcoliamo il residuo avvalendoci della somma della serie geometrica, o meglio delle sue derivate. Infatti, $\forall \alpha$, tale che: $|\alpha| < 1$, si ha

$$\frac{1}{1-\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k,$$

mentre la derivata n -esima, con $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{d^n}{d\alpha^n} \frac{1}{1-\alpha} = \frac{n!}{(1-\alpha)^{n+1}} = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1)\alpha^{k-n} = n! + (n+1)! \alpha + \frac{(n+2)!}{2!} \alpha^2 + \cdots.$$

Consideriamo lo sviluppo della funzione integranda che si ottiene a partire dalla serie di Taylor della funzione seno iperbolico

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sinh^7(z)} &= \frac{1}{(z + z^3/3! + z^5/5! + \mathcal{O}(z^7))^7} = \frac{1}{z^7 (1 + z^2/3! + z^4/5! + \mathcal{O}(z^6))^7} \\ &= \frac{1}{z^7} \frac{1}{6!} \left[6! - 7! \left(\frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \dots \right) + \frac{8!}{2!} \left(\frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \dots \right)^2 - \frac{9!}{3!} \left(\frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \dots \right)^3 + \dots \right] \\ &= \frac{1}{z^7} \left[1 - 7 \left(\frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \dots \right) + \frac{8 \cdot 7}{2!} \left(\frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \dots \right)^2 - \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3!} \left(\frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \dots \right)^3 + \dots \right]. \end{aligned}$$

Il residuo coincide "-1" con il coefficiente della serie di Laurent, per ottenerlo calcoliamo il coefficiente della potenza z^6 nella parentesi quadra. Ad esso contribuiscono termini dalle quantità nelle prime tre parentesi tonde. Dalla prima si ha: $-z^6/6!$, dalla seconda: $2z^6 \cdot 8 \cdot 7 / (2!3!5!)$, infine, dalla terza: $-z^6 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 / (3!(3!)^3)$ e la somma dei tre contributi

$$C_{-1} = \text{Res} \left[\frac{1}{\sinh^7(z)}, z_0 \right] = -\frac{1}{6!} + \frac{2 \cdot 8 \cdot 7}{2!3!5!} - \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{(3!)^4} = -\frac{5}{16}.$$

Ne consegue che

$$\Delta = 2i\pi \text{Res} \left[\frac{1}{\sinh^7(z)}, z_0 \right] = -\frac{5i\pi}{8}.$$

TERZO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si ottenga lo sviluppo di Mittag-Leffler della funzione

$$\boxed{\zeta}(z) = \frac{z}{\text{sen}(z^2)}.$$

SOLUZIONE DEL TERZO PROBLEMA

Si consideri la funzione $\boxed{\zeta}(z)/z = 1/\text{sen}(z^2)$ che, con il cambiamento di variabile $w = z^2$ diventa

$$f(w) \equiv \frac{\boxed{\zeta}(z)}{z} = \frac{1}{\text{sen}(z^2)} = \{w = z^2\} = \frac{1}{\text{sen}(w)}.$$

Lo sviluppo di Mittag-Leffler di $f(w)$ è noto ed è

$$f(w) = \phi + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{w - k\pi} = \phi + \frac{1}{w} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k w}{w^2 - k^2 \pi^2},$$

dove ϕ è costante e si ottiene come

$$\phi = \lim_{w \rightarrow 0} \left(\frac{1}{w} - \frac{1}{\text{sen}(w)} \right) = 0.$$

In termini della variabile z si ha

$$\frac{\boxed{\zeta}(z)}{z} = \frac{1}{z^2} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k z^2}{z^4 - k^2 \pi^2},$$

da cui, moltiplicando ambo i membri per z , si ha lo sviluppo di Mittag-Leffler cercato

$$\boxed{\zeta}(z) = \frac{1}{z} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k z^3}{z^4 - k^2 \pi^2}.$$

QUARTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si ricavi lo spettro discreto dell'operatore

$$\hat{H} = \exp[\vec{\sigma} \cdot (\vec{\sigma} \times \vec{a})],$$

$\forall \vec{a} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ e dove $\vec{\sigma} = (\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}_3)$ è l'operatore vettoriale che ha per componenti i tre operatori di Pauli.

SOLUZIONE DEL QUARTO PROBLEMA

Usiamo l'algebra degli operatori di Pauli, ovvero i commutatori e gli anti-commutatori

$$[\hat{\sigma}_j, \hat{\sigma}_k] = 2i\epsilon_{jkm}\hat{\sigma}_m, \quad \{\hat{\sigma}_j, \hat{\sigma}_k\} = 2\delta_{jk}\hat{I}, \quad \forall j, k \in \{1, 2, 3\},$$

dove ϵ_{jkm} è il tensore completamente anti-simmetrico di Levi-Civita, \hat{I} l'operatore identità e si ha la somma sottintesa sull'indice m nella prima relazione. Sommando ambo i membri delle due relazioni si ottiene

$$\hat{\sigma}_j\hat{\sigma}_k = i\epsilon_{jkm}\hat{\sigma}_m + \delta_{jk}\hat{I}, \quad \forall j, k \in \{1, 2, 3\}.$$

L'operatore ad esponente può essere sviluppato come

$$\vec{\sigma} \cdot (\vec{\sigma} \times \vec{a}) = \epsilon_{jkm}\hat{\sigma}_j\hat{\sigma}_k a_m = \epsilon_{jkm}a_m (i\epsilon_{jkl}\hat{\sigma}_l + \delta_{jk}\hat{I}) = i\epsilon_{jkm}\epsilon_{jkl}a_m\hat{\sigma}_l = 2i\vec{\sigma} \cdot \vec{a}.$$

La matrice che rappresenta questo operatore rispetto alla base degli autovettori del terzo operatore $\hat{\sigma}_3$ è

$$2i\vec{\sigma} \cdot \vec{a} \leftrightarrow 2i \begin{pmatrix} a_3 & a_1 - ia_2 \\ a_1 + ia_2 & -a_3 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori sono le soluzioni dell'equazione secolare

$$\det \begin{pmatrix} 2ia_3 - \lambda & 2ia_1 + 2a_2 \\ 2ia_1 - 2a_2 & -2ia_3 - \lambda \end{pmatrix} = 0 \\ (\lambda^2 + 4a_3^2) + 4(a_1^2 + a_2^2) = 0$$

da cui: $\lambda_{\pm} = \pm 2ia$, dove a è la norma del vettore \vec{a} , cioè: $a = |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$. Usando il teorema spettrale, si ha che gli autovalori dell'operatore \hat{H} si ottengono applicando l'operazione che permette di ottenere \hat{H} dall'operatore $2i\vec{\sigma} \cdot \vec{a}$, ovvero l'esponenziale. Quindi lo spettro discreto dell'operatore \hat{H} è l'insieme

$$\underbrace{\{-2ia, 2ia\}}_{\text{autovalori di } 2i\vec{\sigma} \cdot \vec{a}} \xrightarrow{\text{exp}} \underbrace{\{\exp(-2ia), \exp(2ia)\}}_{\text{autovalori di } \hat{H}}.$$

QUINTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 5/30)

Si ottenga lo spettro discreto dell'operatore \hat{A} definito nello spazio di Hilbert a tre dimensioni E_3 dalle azioni

$$\hat{A}|u_n\rangle = i \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{nj k} b_j |u_k\rangle,$$

sui vettori della base ortonormale $\{|u_k\rangle\}_{k=1}^3 \subset E_3$, dove $\epsilon_{nj k}$ è il tensore completamente anti-simmetrico di Levi-Civita e $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ è un vettore reale diverso dal vettore nullo.

SOLUZIONE DEL QUINTO PROBLEMA

Gli elementi della matrice A che rappresenta l'operatore \hat{A} rispetto alla base canonica $\{|u_k\rangle\}_{k=1}^3$ si ottengono dai prodotti $A_n^m = \langle u_m | \hat{A} | u_n \rangle$, con $m, n \in \{1, 2, 3\}$. Usando le azioni note dell'operatore e l'ortonormalità dei vettori della base, si hanno

$$A_n^m = \langle u_m | \hat{A} | u_n \rangle = i \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{nj k} b_j \langle u_m | u_k \rangle = i \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{nj k} b_j \delta_k^m = i \sum_{j=1}^3 \epsilon_{nj m} b_j = i \sum_{j=1}^3 \epsilon_{m n j} b_j, \quad \forall m, n \in \{1, 2, 3\}.$$

La matrice A è

$$\hat{A} \overset{u}{\leftrightarrow} A = i \begin{pmatrix} 0 & b_3 & -b_2 \\ -b_3 & 0 & b_1 \\ b_2 & -b_1 & 0 \end{pmatrix},$$

che ha equazione secolare

$$\det \begin{pmatrix} -\alpha & ib_3 & -ib_2 \\ -ib_3 & -\alpha & ib_1 \\ ib_2 & -ib_1 & -\alpha \end{pmatrix} = 0$$

$$-\alpha(\alpha^2 - b_1^2) - ib_3(ib_3\alpha + b_1b_2) - ib_2(-b_1b_3 + ib_2\alpha) = 0$$

$$-\alpha(\alpha^2 - b_1^2 - b_2^2 - b_3^2) = 0.$$

gli autovalori sono $\alpha_0 = 0$ e $\alpha_{\pm} = \pm|\vec{b}|$. Lo spettro discreto dell'operatore \hat{A} è l'insieme

$$\{\alpha_0, \alpha_-, \alpha_+\} = \{0, -|\vec{b}|, +|\vec{b}|\}.$$

SESTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si ottenga il valore dell'integrale

$$\square = \int_{1/2}^{\infty} \delta(\Gamma^2(x) - 3\Gamma(x) + 2) dx,$$

dove $\Gamma(z)$ è la funzione gamma di Eulero.

Utilità. Si ricordi il valore della derivata prima della funzione gamma in $z = 1$ è dato dalla costante di Eulero-Mascheroni $\gamma \simeq 0,5772$.

SOLUZIONE DEL SESTO PROBLEMA

I valori di x in cui si annulla l'argomento della delta di Dirac sono quelli che verificano l'equazione

$$(\Gamma(x) - 1)(\Gamma(x) - 2) = 0,$$

ovvero

$$\Gamma(x) = 1 \Rightarrow x_{1,2} = 1, 2,$$

$$\Gamma(x) = 2 \Rightarrow x_3 = 3.$$

Quindi

$$\square = \sum_{j=1}^3 \frac{1}{|\Gamma'(x_j)(2\Gamma(x_j) - 3)|} = \frac{1}{|\Gamma'(1)(2\Gamma(1) - 3)|} + \frac{1}{|\Gamma'(2)(2\Gamma(2) - 3)|} + \frac{1}{|\Gamma'(3)(2\Gamma(3) - 3)|}$$

$$= \frac{1}{|\Gamma'(1)|} + \frac{1}{|\Gamma'(2)|} + \frac{1}{|\Gamma'(3)|}.$$

Le derivate in $x_3 = 3$ e $x_2 = 2$ si ottengono sfruttando l'equazione di ricorrenza e si hanno

$$\left. \frac{d}{dz} \Gamma(z+2) \right|_{z=1} = \left. \frac{d}{dz} (z+1)z\Gamma(z) \right|_{z=1} = (z\Gamma(z) + (z+1)\Gamma(z) + z(z+1)\Gamma'(z)) \Big|_{z=1}$$

$$\Gamma'(3) = 1 + 2 - 2\gamma = 3 - 2\gamma;$$

$$\left. \frac{d}{dz} \Gamma(z+1) \right|_{z=1} = \left. \frac{d}{dz} z\Gamma(z) \right|_{z=1} = (\Gamma(z) + z\Gamma'(z)) \Big|_{z=1}$$

$$\Gamma'(2) = 1 - \gamma.$$

Da cui il risultato

$$\square = \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{1-\gamma} + \frac{1}{3-2\gamma}.$$