Metodi Matematici per la Fisica

Quarto appello estivo - 20 settembre 2022

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che il punteggio assegnato a ciascuna procedura di risoluzione può variare tra lo zero e il massimo indicato ed è stabilito valutando:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo.

Primo problema (punteggio massimo: 6/30)

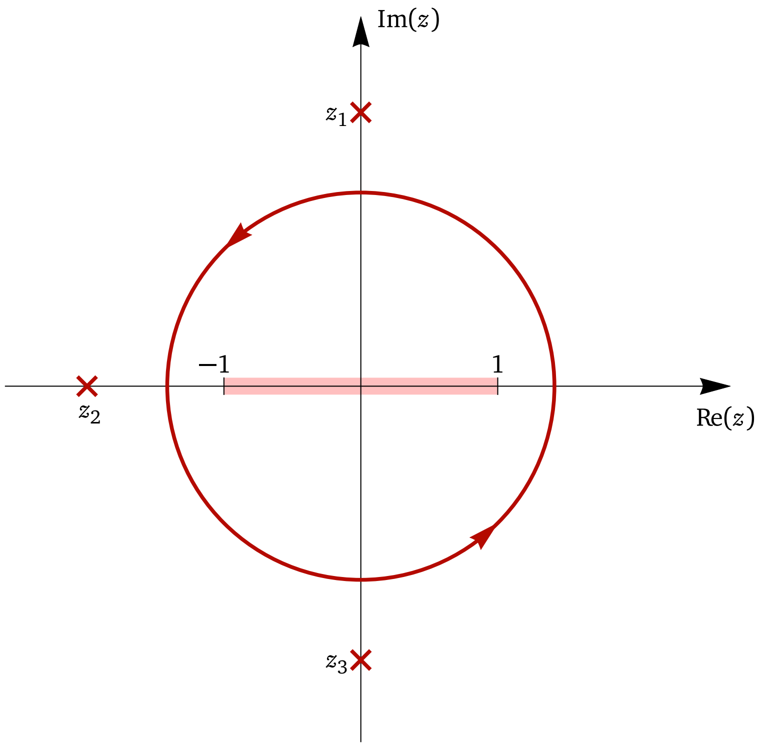
Si calcoli l'integrale

$$\square = \oint_{|z|^2=2} \frac{\sqrt{1-z^2}}{\sum_{j=0}^{3} (z/2)^j} dz \,,$$

dove la funzione integranda è polidroma con un taglio nel segmento reale $[-1, 1]$.

Soluzione del primo problema

La funzione integranda ha un taglio, ovvero una regione di discontinuità coincidente con il segmento reale $[-1, 1]$, evidenziato in arancione nella figura, in base a questo dato si definiscono le fasi delle due funzioni in cui si fattorizza l'argomento della radice quadrata che ne rappresenta il denominatore.



Quindi scriviamo

$$\sqrt{1-z^2}=\sqrt{(1-z)(1+z)}\,, \qquad \text{con: } \sqrt{1\mp z}=\sqrt{|1\mp z|e^{i\theta_\pm}}=\sqrt{|1\mp z|}e^{i\theta_\pm/2}\,,$$

affinché le due funzioni polidrome $\sqrt{1\mp z}$ abbiamo i tagli "in avanti", rispettivamente $(\pm1,\infty)$, a partire dai punti di diramazione al finito $z=\pm1$, le determinazioni delle fasi debbono essere

$$\arg(1+z)=\theta_-\in(0,2\pi)\,, \qquad \arg(1-z)=\theta_+\in(-\pi,\pi)\,.$$

I valori di queste fasi sui bordi superiori e inferiori dei tagli sono

$$\arg(1+z)=\theta_- \xrightarrow[\epsilon\to 0^+]{x\in(-1,\infty)} \begin{cases} 0^+ & z=x+i\epsilon \\ \\ 2\pi^- & z=x-i\epsilon \end{cases}\,, \qquad \arg(1-z)=\theta_+ \xrightarrow[\epsilon\to 0^+]{x\in(1,\infty)} \begin{cases} -\pi^+ & z=x+i\epsilon \\ \\ \pi^- & z=x-i\epsilon \end{cases}\,.$$

I due tagli si cancellano nella loro intersezione, ovvero lungo la semiretta reale $(1,\infty)$, coincidente con il secondo. Ciò si evince osservando esplicitamente che lungo questa semirette la funzione $\sqrt{1-z^2}$ non è discontinua, infatti

$$\sqrt{1-z^2}=\left|1-z^2\right|e^{i\arg\left(\sqrt{1-z^2}\right)}=\left|1-z^2\right|e^{i(\theta_-+\theta_+)/2} \xrightarrow[\epsilon\to 0^+]{x\in(1,\infty)} \begin{cases} \sqrt{x^2-1}\,e^{i\left(0^+-\pi^+\right)/2}=\sqrt{x^2-1}\,e^{-i\pi/2}=-i\sqrt{x^2-1} \\ \\ \sqrt{x^2-1}\,e^{i\left(2\pi^-+\pi^-\right)/2}=\sqrt{x^2-1}\,e^{3i\pi/2}=-i\sqrt{x^2-1} \end{cases}\,.$$

Al contrario, lungo il segmento $[-1,1]$, la differenza tra i tagli, la funzione $\sqrt{1-z^2}$ è discontinua, come si verifica direttamente che il limiti sono opposti, cioè

$$\sqrt{1-z^2}=\left|1-z^2\right|e^{i\arg\left(\sqrt{1-z^2}\right)}=\left|1-z^2\right|e^{i(\theta_-+\theta_+)/2} \xrightarrow[\epsilon\to 0^+]{x\in(-1,1)} \begin{cases} \sqrt{1-x^2}\,e^{i\left(0^++0^-\right)/2}=\sqrt{1-x^2} \\ \\ \sqrt{1-x^2}\,e^{i\left(2\pi^-+0^+\right)/2}=\sqrt{1-x^2}\,e^{i\pi}=-\sqrt{1-x^2} \end{cases}\,.$$

La funzione integranda ha inoltre tre poli semplici in corrispondenza con i tre zeri semplici del polinomio di terzo grado che ne rappresenta il denominatore. Moltiplicando a numeratore e denominatore per $(z/2-1)$ si ha

$$\sum_{j=0}^{3}\left(\frac{z}{2}\right)^j=\frac{(z/2)^4-1}{z/2-1}\,,$$

gli zeri semplici del polinomio di quarto grado a numeratore sono le prime quattro radici quarte dell'unità moltiplicate per 2, ovvero $z_k=2e^{i\pi k/2}$, con $k=0,1,2,3$. Il primo, $z_0=2$ coincide con l'unico zero del polinomio di primo grado a numeratore, è quindi una singolarità eliminabile. Ne consegue che gli zeri semplici sono i tre elementi dell'insieme: $\left\{z_k=2e^{i\pi k/2}\right\}_{k=1}^3$, in dettaglio:

$$z_1=2i\,, \quad z_2=-2\,, \quad z_3=-2i\,,$$

indicati con i simboli "×" nella figura alla fine della pagina precedente. Alla luce di quanto ottenuto, l'integrale richiesto può essere calcolato usando il teorema dei residui, osservando che il percorso d'integrazione, mostrato nella figura alla fine della pagina precedente, ovvero la circonferenza di raggio $\sqrt{2}$ centrata nell'origina avvolge positivamente, cioè in senso anti-orario il taglio $[-1,1]$ e di conseguenza avvolge in senso negativo, orario le tre singolarità al finito, i tre poli semplici dell'insieme $\left\{z_k=2e^{i\pi k/2}\right\}_{k=1}^3$ e l'eventuale singolarità all'infinito. In base all'ultima affermazione si ha

$$\begin{aligned}\square=\oint_{|z|^2=2}\frac{\sqrt{1-z^2}}{\sum_{j=0}^3(z/2)^j}dz&=-2i\pi\left(\sum_{k=1}^{3}\text{Res}\left[\frac{\sqrt{1-z^2}}{\sum_{j=0}^3(z/2)^j},z_k\right]+\text{Res}\left[\frac{\sqrt{1-z^2}}{\sum_{j=0}^3(z/2)^j},\infty\right]\right)\\ &=-2i\pi\left(\sum_{k=1}^{3}\text{Res}\left[\frac{\sqrt{1-z^2}}{\sum_{j=0}^3(z/2)^j},z_k\right]-\text{Res}\left[\frac{\sqrt{1-1/w^2}}{\sum_{j=0}^3[1/(2w)]^j}\frac{1}{w^2},0\right]\right).\end{aligned}$$

L'ultimo residue della precedente espressione è nullo, infatti, con $r\in(0,1)$, si ha

$$\begin{aligned}\text{Res}\left[\frac{\sqrt{1-1/w^2}}{\sum_{j=0}^3[1/(2w)]^j}\frac{1}{w^2},0\right]&=\frac{1}{2i\pi}\oint_{|w|=r}\frac{\sqrt{1-1/w^2}}{\sum_{j=0}^3[1/(2w)]^j}\frac{1}{w^2}dw=\frac{1}{2i\pi}\oint_{|w|=r}\frac{w^{-1}\sqrt{w^2-1}}{w^{-3}\sum_{j=0}^3(w/2)^j}\frac{1}{w^2}dw\\ &=\frac{1}{2i\pi}\oint_{|w|=r}\frac{\sqrt{w^2-1}}{\sum_{j=0}^3(w/2)^j}dw=\frac{1}{2i\pi}\oint_{|w|=r}\frac{\sqrt{w^2-1}}{1+w/2+(w/2)^2+(w/2)^3}dw=0\,.\end{aligned}$$

Si ottiene questo risultato usando il teorema di Cauchy, poiché la funzione integranda è analitica in un intorno dell'origine nel piano complesso w. In effetti, il taglio che nel piano complesso z coincide con il segmento reale $[-1,1]$, nel piano complesso w, con $w = 1/z$, si trasforma l'unione delle due semirette reali $(-\infty,-1] \cup [1,\infty)$. In particolare, la porzione negativa del taglio in z, ovvero $[-1,0)$, genera nel piano complesso w la semiretta $(-\infty,-1)$, quella positiva $(0,1]$ genera invece la semiretta anch'essa positiva è $(1,\infty)$. L'origine $w = 0$ non appartiene all'unione delle semirette e quindi non giace in una regione di discontinuità.
Alla luce di queste considerazioni, l'integrale $\square$ vale

$$\square = -2i\pi \sum_{k=1}^{3} \operatorname{Res}\left[\frac{\sqrt{1-z^2}}{\sum_{j=0}^{3}(z/2)^j}, z_k\right].$$

I residui dei poli semplici si ottengono come

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left[\frac{\sqrt{1-z^2}}{\sum_{j=0}^{3}(z/2)^j}, z_k\right] &= \operatorname{Res}\left[\frac{\sqrt{1-z^2}\,(z/2-1)}{(z/2)^4-1}, z_k\right] = \lim_{z\to z_k} \frac{\sqrt{1-z^2}\,(z/2-1)}{(z/2)^4-1}(z-z_k) \\
&= \left\{\text{usando la regola di Bernoulli-De l'Hôpital per la forma zero su zero: } \frac{z-z_k}{(z/2)^4-1}\right\} \\
&= \frac{\sqrt{1-z_k^2}\,(z_k/2-1)}{4z_k^3/2^4} \\
&= \left\{\text{moltiplicando e dividendo per } z_k \text{ e usando la "condizione di zero": } (z_k/2)^4 = 1\right\} \\
&= \frac{\sqrt{1-z_k^2}\,(z_k/2-1)\,z_k}{4\,(z_k/2)^4} = \frac{\sqrt{1-z_k^2}\,(z_k/2-1)\,z_k}{4}, \qquad k = 1,2,3.
\end{aligned}$$

Valutiamo il termine radice quadrata usando le definizioni precedentemente discusse per le fasi dei binomi $(1-z)$ e $(1+z)$ in cui fattorizziamo l'argomento della stessa radice al fine di ottenere il taglio sul segmento $[-1,1]$. Si avevano le definizioni

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+z} &= \sqrt{|1+z|}e^{i\theta_-/2}, &\qquad \theta_- &\in (0,2\pi), \\
\sqrt{1-z} &= \sqrt{|1-z|}e^{i\theta_+/2}, &\qquad \theta_+ &\in (-\pi,\pi),
\end{aligned}$$

ne consegue che in $z = z_1 = 2i$

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+z_1} &= \sqrt{1+2i} = \sqrt{\sqrt{5}}\,e^{i\arctan(2)/2}, &\qquad &\arctan(2) \in (0,2\pi) \\
\sqrt{1-z_1} &= \sqrt{1-2i} = \sqrt{\sqrt{5}}\,e^{i\arctan(-2)/2}, &\qquad &\arctan(-2) \in (-\pi,\pi),
\end{aligned}$$

le inclusioni finali indicano che è necessario scegliere per le funzioni arcotangente le determinazioni opportune. A tal fine usiamo la condizione $\arctan(2) \in (0,\pi/2)$, ovvero l'angolo $\arctan(2)$ appartiene al primo quadrante. Per il valore di $\arctan(-2)$, appartenente al quarto quadrante, caratterizzato dalle parte reale positiva e parte immaginaria negativa, infatti il numero complesso di cui rappresenta la fase è $z = 1-2i$, si hanno scelte diverse a seconda della determinazione, apparterrebbe all'intervallo negativo $(-\pi/2,0)$ se la determinazione fosse $(-\pi,\pi)$, all'intervallo positivo $(3\pi/2,2\pi)$ se, invece, la determinazione fosse $(0,2\pi)$. Poiché è la prima delle due la determinazione definita per questa fase e, usando come detto $\arctan(2) \in (0,\pi/2)$, scriviamo $\arctan(-2) = -\arctan(2)$. Per concludere

$$\sqrt{1-z_1^2} = \sqrt{1+z_1}\sqrt{1-z_1} = \sqrt{5}\,e^{i(\arctan(2)+\arctan(-2))/2} = \sqrt{5}\,e^{i(\arctan(2)-\arctan(2))/2} = \sqrt{5}.$$

Nel caso di $z = z_2 = -2$,

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+z_2} &= \sqrt{1-2} = \sqrt{1}\,e^{i\arctan(0^-)/2} = e^{i\pi/2} = i, &\qquad &\arctan(0^-) = \pi^+ \in (0,2\pi), \\
\sqrt{1-z_2} &= \sqrt{1+2} = \sqrt{3}\,e^{i\arctan(0^+)/2} = \sqrt{3}, &\qquad &\arctan(0^+) = 0 \in (-\pi,\pi),
\end{aligned}$$

dove si è usata la definizione

$$\alpha^{\pm} = \lim_{\epsilon\to 0^+}(\alpha \pm \epsilon), \qquad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Moltiplicando i due fattori si ha

$$\sqrt{1-z_2^2} = \sqrt{1+z_2}\sqrt{1-z_2} = i\sqrt{3}\,.$$

Per il terzo polo $z_3 = -2i$ usiamo le stesse considerazioni del primo, facendo attenzione all'inversione delle determinazioni, cioè

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+z_3} &= \sqrt{1-2i} = \sqrt{\sqrt{5}}\,e^{i\arctan(-2)/2}\,, &\qquad \arctan(-2) \in (0, 2\pi)\\
\sqrt{1-z_3} &= \sqrt{1+2i} = \sqrt{\sqrt{5}}\,e^{i\arctan(2)/2}\,, &\qquad \arctan(2) \in (-\pi, \pi)\,,
\end{aligned}$$

riscriviamo, quindi, $\arctan(-2) = 2\pi - \arctan(2) \in (3\pi/2, 2\pi)$, appartiene al quarto quadrante in determinazione $(0, 2\pi)$. Il prodotto dà

$$\sqrt{1-z_3^2} = \sqrt{1+z_3}\sqrt{1-z_3} = \sqrt{5}\,e^{i(\arctan(-2)+\arctan(2))/2} = \sqrt{5}\,e^{i(2\pi-\arctan(2)+\arctan(2))/2} = \sqrt{5}\,e^{i\pi} = -\sqrt{5}\,.$$

Consideriamo la somma dei residui

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{3} \operatorname{Res}\left[\frac{\sqrt{1-z^2}}{\sum_{j=0}^{3}(z/2)^j}, z_k\right] &= \sum_{k=1}^{3} \frac{\sqrt{1-z_k^2}\,(z_k/2-1)\,z_k}{4}\\
&= \frac{1}{4}\left[\sqrt{1-z_1^2}\left(\frac{z_1}{2}-1\right)z_1 + \sqrt{1-z_2^2}\left(\frac{z_2}{2}-1\right)z_2 + \sqrt{1-z_3^2}\left(\frac{z_3}{2}-1\right)z_3\right]\\
&= \frac{1}{4}\left[2i\sqrt{5}(i-1) - 2i\sqrt{3}(-1-1) + 2i\sqrt{5}(-i-1)\right]\\
&= \frac{1}{4}\left[2\sqrt{5}(-1-i) + 4i\sqrt{3} + 2\sqrt{5}(1-i)\right]\\
&= -i\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\,.
\end{aligned}$$

Infine, l'integrale cercato si ottiene come $(-2i\pi)$-volte tale somma e vale

$$\square = -2i\pi \sum_{k=1}^{3} \operatorname{Res}\left[\frac{\sqrt{1-z^2}}{\sum_{j=0}^{3}(z/2)^j}, z_k\right] = \sum_{k=1}^{3} \frac{\sqrt{1-z_k^2}\,(z_k/2-1)\,z_k}{4} = -2i\pi\left[-i\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\right]\,,$$

cioè

$$\square = 2\pi\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)\,.$$

SECONDO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$\odot = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^{x/3} + e^{-x/5}}\,.$$

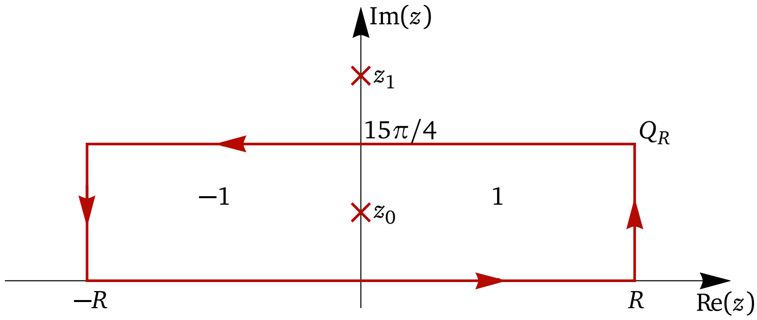
SOLUZIONE DEL SECONDO PROBLEMA

Riscriviamo l'integrale come

$$\odot = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{x/5}}{e^{8x/15}+1}\,dx\,.$$

Consideriamo il rettangolo, mostrato nella figura della pagina successiva, di base $2R$ e altezza h simmetrico rispetto all'asse immaginario, con una base appartenete all'asse reale e con gli altri lati immersi nel semipiano delle parti immaginarie positive, ovvero

$$Q_R = [-R, R] \cup [R, R+ih] \cup [R+ih, -R+ih] \cup [-R, -R+ih]\,,$$



dove il simbolo $[z_1, z_2]$ rappresenta il segmento di retta passante per i punti z_1 e z_2, di estremi z_1 e z_2, orientato nel verso che va dal primo a secondo estremo.
Scegliamo l'altezza h in modo tale

$$\frac{8h}{15} = 2\pi \qquad \Rightarrow \qquad h = \frac{15\pi}{4}\,, \qquad \frac{h}{5} = \frac{3\pi}{4}\,.$$

L'integrale sul rettangolo Q_R della stessa funzione integranda dell'integrale $\odot$

$$\oint_{Q_R} \frac{e^{z/5}}{e^{8z/15}+1}dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{x/5}}{e^{8x/15}+1}dx + \int_{[R,R+ih]} \frac{e^{z/5}}{e^{8z/15}+1}dz + e^{3i\pi/4}\int_{R}^{-R} \frac{e^{x/5}}{e^{8x/15}+1}dx + \int_{[-R+ih,-R]} \frac{e^{z/5}}{e^{8z/15}+1}dz\,.$$

Nel limite $R \to \infty$ gli integrali sui tratti verticali si annullano, quello sulla base del rettangolo appartenete all'asse reale tende all'integrale $\odot$, mentre quello sull'altra base tende ad una valore proporzionale allo stesso $\odot$. Per gli integrali sui tratti verticali consideriamo il limite del modulo

$$\lim_{R\to\infty}\left|\pm\int_{[\pm R,\pm R+ih]} \frac{e^{z/5}}{e^{8z/15}+1}dz\right| = \lim_{R\to\infty}\left|\int_0^h \frac{e^{(\pm R+iy)/5}}{e^{8(\pm R+iy)/15}+1}dy\right| \le \lim_{R\to\infty}\int_0^h \frac{e^{\pm R/5}}{\left|e^{\pm 8R/15}-1\right|}dy = \lim_{R\to\infty}\frac{he^{\pm R/5}}{\left|e^{\pm 8R/15}-1\right|}\,,$$

dove si sono utilizzate le disuguaglianze di Darboux e quella triangolare per il denominatore, secondo cui il modulo della somma è maggiore o uguale al modulo della differenza dei moduli. Consideriamo separatamente i due casi relativi al segno alto e al segno basso, nel primo dei due si ha

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_{[R,R+ih]} \frac{e^{z/5}}{e^{8z/15}+1}dz\right| \le \lim_{R\to\infty}\frac{he^{R/5}}{\left|e^{8R/15}-1\right|} = \lim_{R\to\infty}\frac{he^{R/5-8R/15}}{\left|1-e^{-8R/15}\right|} = \lim_{R\to\infty}\frac{he^{-R/3}}{\left|1-\underbrace{e^{-8R/15}}_{\to 0}\right|} = 0\,.$$

Nel caso del segno basso si ha invece

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_{[-R,-R+ih]} \frac{e^{z/5}}{e^{8z/15}+1}dz\right| \le \lim_{R\to\infty}\frac{he^{-R/5}}{\left|\underbrace{e^{-8R/15}}_{\to 0}-1\right|} = 0\,.$$

Ne consegue

$$\begin{aligned}\lim_{R\to\infty}\oint_{Q_R} \frac{e^{z/5}}{e^{8z/15}+1}dz &= \lim_{R\to\infty}\left(\int_{-R}^{R} \frac{e^{x/5}}{e^{8x/15}+1}dx + e^{3i\pi/4}\int_{R}^{-R} \frac{e^{x/5}}{e^{8x/15}+1}dx\right) = \left(1-e^{3i\pi/4}\right)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{x/5}}{e^{8x/15}+1}dx \\ &= \left(1-e^{3i\pi/4}\right)\odot\,.\end{aligned}$$

La funzione integranda è meromorfa e ha poli in corrispondenza degli zeri del denominatore, che sono i punti della successione $\{z_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ tali che

$$e^{8z_k/15} = e^{(2k+1)i\pi} \qquad \Rightarrow \qquad z_k = \frac{15}{8}(2k+1)i\pi\,, \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}$$

ovvero tali che l'esponenziale a denominatore sia uguale a -1 con fase generica. I primi due poli z_0 e z_1 sono indicati nella figura della pagina precedente con i simboli "×". Sono poli semplici, in quanto zeri semplici, come si dimostra verificando che non sono zeri della derivata prima dello stesso denominatore, infatti

$$\lim_{z\to z_k}\frac{d}{dz}\left(e^{8z/15}+1\right)=\frac{8}{15}\lim_{z\to z_k}e^{8z/15}=\frac{8}{15}\underbrace{e^{8z_k/15}}_{=-1}=-\frac{8}{15}\,.$$

Considerando i valori dei poli corrispondenti ai primi relativi non negativi si hanno

$$z_0=\frac{15}{8}i\pi\,,\qquad z_1=\frac{45}{8}i\pi\,,\qquad z_2=\frac{75}{8}i\pi\,,\qquad z_3=\frac{105}{8}i\pi\,,\qquad z_4=\frac{135}{8}i\pi\,,\qquad \dots\,,$$

l'altezza del rettangolo Q_R è $h=15\pi/4=30\pi/8$, ne consegue che lo stesso rettangolo, $\forall R\in(0,\infty)$ e quindi indipendentemente da R, avvolge il solo polo $z_0=15i\pi/8$. Possiamo ottenere il limite per $R\to\infty$ dell'integrale sul rettangolo Q_R usando il teorema dei residui

$$\begin{aligned}\lim_{R\to\infty}\oint_{Q_R}\frac{e^{z/5}}{e^{8z/15}+1}dz&=2i\pi\,\mathrm{Res}\left[\frac{e^{z/5}}{e^{8z/15}+1},\frac{15i\pi}{8}\right]=2i\pi\lim_{z\to 15i\pi/8}\frac{e^{z/5}}{e^{8z/15}+1}\left(z-\frac{15i\pi}{8}\right)\\&=2i\pi\frac{e^{3i\pi/8}}{8e^{i\pi}/15}=-\frac{15i\pi e^{3i\pi/8}}{4}\,.\end{aligned}$$

Uguagliano questo risultato con l'espressione dello stesso limite in termini dell'integrale ⊚ si ha

$$\begin{aligned}\left(1-e^{3i\pi/4}\right)\circledcirc&=-\frac{15i\pi e^{3i\pi/8}}{4}\\ \circledcirc&=-\frac{15i\pi}{4}\frac{1}{e^{-3i\pi/8}-e^{3i\pi/8}}=-\frac{15i\pi}{4}\frac{1}{-2i\ \mathrm{sen}(3i\pi/8)}=\frac{15\pi}{8}\frac{1}{\mathrm{sen}(3\pi/8)}\,,\end{aligned}$$

usando la formula di bisezione $\sin(\theta/2)=\pm\sqrt{(1-\cos(2\theta))/2}$, si ha

$$\begin{aligned}\circledcirc&=\frac{15\pi}{8}\frac{1}{\mathrm{sen}(3\pi/8)}=\frac{15\pi}{8}\sqrt{\frac{2}{1-\cos(3\pi/4)}}=\frac{15\pi}{8}\sqrt{\frac{2}{1+1/\sqrt{2}}}=\frac{15\pi}{8}\sqrt{\frac{2}{1+1/\sqrt{2}}\frac{1-1/\sqrt{2}}{1-1/\sqrt{2}}}\\&=\frac{15\pi}{8}\sqrt{\frac{2\left(1-1/\sqrt{2}\right)}{1/2}}=\frac{15\pi}{8}\sqrt{4\left(1-1/\sqrt{2}\right)}\,,\end{aligned}$$

da cui, estraendo la radice quadrata di 4, si ottiene l'integrale cercato nella forma

$$\circledcirc=\frac{15\pi}{4}\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}\,.$$

TERZO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si ottenga lo sviluppo di Mittag-Leffler della funzione

$$\nabla(z)=\frac{1}{3^z-1}\,.$$

SOLUZIONE DEL TERZO PROBLEMA

La funzione $\nabla(z)$ è meromorfa, è infatti il rapporto di due funzioni intere. Le singolarità coincidono con gli zeri del denominatore e si ottengono come soluzioni dell'equazione $3^z-1=0$, ovvero

$$e^{z\ln(3)}-1=0\qquad\Rightarrow\qquad e^{z_k\ln(3)}=1=e^{2ik\pi}\qquad\Rightarrow\qquad z_k=1=\frac{2ik\pi}{\ln(3)}\,,\qquad k\in\mathbb{Z},.$$

Le singolarità dell'insieme $\{z_k=2ik\pi/\ln(3)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ sono poli semplici, essendo zeri semplici del denominatore di $\nabla(z)$, come si evince dal fatto che in tali punti la derivata prima del funzione a denominatore non si annulli, infatti

$$\lim_{z\to z_k}\frac{d}{dz}(3^z-1)=\lim_{z\to z_k}\frac{d}{dz}\left(e^{z\ln(3)}-1\right)=\lim_{z\to z_k}\ln(3)e^{z\ln(3)}=\ln(3)\underbrace{3^{z_k}}_{=1}=\ln(3)\neq 0\,.$$

I poli semplici dell'insieme $\{z_k = 2ik\pi/\ln(3)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ hanno tutti lo stesso residuo, come si deduce dal risultato precedente, ovvero

$$C_{-1}^{(k)} = \lim_{z\to z_k} \nabla(z)(z-z_k) = \lim_{z\to z_k} \frac{z-z_k}{e^{z\ln(3)}-1} = \frac{1}{\ln(3)e^{z_k\ln(3)}} = \frac{1}{\ln(3)\underbrace{3^{z_k}}_{=1}} = \frac{1}{\ln(3)}\,,$$

dove si è indicato il residuo del k-esimo polo semplice come il coefficiente -1 della serie di Laurent della funzione $\nabla(z)$ centrata nello stesso polo z_k, convergente nella corona circolare $C_k = \{z : 0 < |z| < |z_k - z_{k\pm 1}| = 2\pi/\ln(3)\}$. Sfruttando la proprietà di anti-simmetria dei poli semplici $z_k = -z_{-k}$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$, si ha lo sviluppo di Mittag-Leffler

$$\nabla(z) = \phi(z) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1/\ln(3)}{z-z_k} = \phi(z) + \frac{1}{\ln(3)z} + \frac{1}{\ln(3)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - z_k^2}\,,$$

dove la funzione $\phi(z)$ rappresenta la parte intera della funzione $\nabla(z)$ e le due funzioni hanno lo stesso comportamento asintotico, cioè

$$\lim_{z\to\infty} \nabla(z) = \lim_{z\to\infty} \phi(z)\,.$$

La funzione $\nabla(z)$ è regolare all'infinito, infatti

$$\lim_{z\to\infty} |\nabla(z)| = \begin{cases} \dfrac{1}{\left|e^{z\ln(3)}-1\right|} \le \dfrac{1}{\left|e^{\,\mathrm{Re}(z)\ln(3)}+1\right|} = 0 & \mathrm{Re}(z) \to \infty \\ \dfrac{1}{\left|e^{z\ln(3)}-1\right|} \le \dfrac{1}{\left|e^{\,\mathrm{Re}(z)\ln(3)}+1\right|} = 1 & \mathrm{Re}(z) \to -\infty \\ \displaystyle\lim_{k\to\pm\infty} \frac{1}{\left|e^{z'_k\ln(3)}-1\right|} < \infty & \mathrm{Re}(z) = 0\,,\ z'_k \ne z_k = \frac{2ik\pi}{\ln(3)} \end{cases},$$

nell'ultimo dei tre casi, poiché la divergenza avviene lungo l'asse immaginario che contiene i poli, è necessario considerare una generica successione divergente, indicata con $\left\{z'_k\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$, che sia però disgiunta da quella dei poli, ovvero tale che: $\left\{z'_k\right\}_{k\in\mathbb{Z}} \cap \left\{z'_k\right\}_{k\in\mathbb{Z}} = \varnothing$. Ne consegue che il modulo del denominatore è sempre strettamente maggiore di zero, cioè $\left|e^{z'_k\ln(3)}-1\right| > 0$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$, che implica la limitazione indicata $1/\left|e^{z'_k\ln(3)}-1\right| < \infty$. Da questo risultato si deduce che la funzione $\phi(z)$ è costante. Per otteneme il valore valutiamo l'espressione in $z = 0$, anche se rappresenta un polo semplice. I primi termini dello sviluppo di Laurent della funzione $\nabla(z)$ in $z = z_0 =$ sono

$$\nabla(z) = \frac{1}{\ln(3)z} - \frac{1}{2} + \frac{\ln(3)}{12}z + \cdots\,,$$

come già visto, il coefficiente dell'unico termine della parte principale, ovvero il residuo è $1/\ln(3)$. Partendo dallo sviluppo di Mittag-Leffler in termini della funzione $\phi(z)$, del polo semplice $1/(z\ln(3))$ e della serie con indici $k \in \mathbb{N}$, considerando la precedente serie di Laurent e facendo il limite $z \to 0$ della differenza $\nabla(z) - 1/(\ln(3)z)$ si ha

$$\lim_{z\to 0}\left(\nabla(z) - \frac{1}{\ln(3)z}\right) = -\frac{1}{2} = \lim_{z\to 0}\left(\phi(z) + \frac{1}{\ln(3)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2 - z_k^2}\right) = \phi(0)\,,$$

dove $\phi(0)$ è il valore costante della parte intera che vale

$$\phi(0) = -\frac{1}{2}\,.$$

La forma completa dello sviluppo di Mittag-Leffler è

$$\nabla(z) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{\ln(3)z} + \frac{1}{\ln(3)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2 - z_k^2}\,.$$

Quarto problema (punteggio massimo: 7/30)

Sia $\hat{O}$ un operatore normale e regolare, si dimostri che esistono quattro operatori hermitiani $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{M}$ e $\hat{F}$, tali che

$$\hat{O} = \hat{A} + i\hat{B} = \hat{M} e^{i\hat{F}} .$$

Si ricavino le espressioni dei suddetti operatori in termini dell'operatore $\hat{O}$ e del suo coniugato hermitiano $\hat{O}^\dagger$.
Inoltre, nel caso in cui l'operatore normale $\hat{O}$ sia definito nello spazio di Hilbert a tre dimensioni H_3 e sia rappresentato dalla matrice

$$\hat{O} \hookleftarrow O = \begin{pmatrix} i-1 & 2i & 0 \\ 2i & -i-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

rispetto alla base canonica, si ottengano gli autovalori, ovvero gli spettri discreti degli operatori $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{M}$ e $\hat{F}$

Soluzione del quarto problema

Gli operatori $\hat{A}$ e $\hat{B}$ si ottengono come combinazioni dell'operatore $\hat{O}$ e del suo coniugato hermitiano, in particolare

$$\hat{A} = \frac{\hat{O} + \hat{O}^\dagger}{2} , \qquad \hat{B} = \frac{\hat{O} - \hat{O}^\dagger}{2i} .$$

È immediato verificare che sono operatori hermitiani e che verificano la relazione $\hat{O} = \hat{A} + i\hat{B}$.
Al fine di dimostrare l'esistenza degli operatori $\hat{M}$ e $\hat{F}$, consideriamo il logaritmo naturale dell'operatore $\hat{O}$, che è esso stesso un operatore normale, che, per quanto appena dimostrato, possiamo decomporre in termini di due operatori hermitiani $\hat{P}$ e $\hat{Q}$, come

$$\ln\left(\hat{O}\right) = \hat{P} + i\hat{Q} ,$$

con

$$\hat{P} = \frac{\ln\left(\hat{O}\right) + \ln\left(\hat{O}\right)^\dagger}{2} = \frac{\ln\left(\hat{O}\right) + \ln\left(\hat{O}^\dagger\right)}{2} , \qquad \hat{Q} = \frac{\ln\left(\hat{O}\right) - \ln\left(\hat{O}\right)^\dagger}{2i} = \frac{\ln\left(\hat{O}\right) - \ln\left(\hat{O}^\dagger\right)}{2i} .$$

Facendo l'esponenziazione di ambo i membri della relazione del logaritmo dell'operatore $\hat{O}$, si ha

$$\hat{O} = e^{\hat{P}} e^{i\hat{Q}} ,$$

dove l'operatore $e^{\hat{P}}$ è hermitiano essendo tale l'operatore $\hat{P}$. Abbiamo quindi ottenuto i due operatori hermitiani $\hat{M}$ e $\hat{P}$, sono

$$\hat{M} = e^{\hat{P}} = \exp\left(\frac{\ln\left(\hat{O}\right) + \ln\left(\hat{O}^\dagger\right)}{2}\right) , \qquad \hat{F} = \hat{Q} = \frac{\ln\left(\hat{O}\right) - \ln\left(\hat{O}^\dagger\right)}{2i} .$$

Al fine di ottenere gli spettri discreti degli operatori $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{M}$ e $\hat{F}$ nel caso particolare, calcoliamo lo spettro discreto dell'operatore $\hat{O}$ e usiamo il teorema spettrale. L'equazione secolare dell'operatore $\hat{O}$ è

$$\begin{aligned} \det\left(\hat{O} - \omega\hat{I}\right) &= 0 \\ \det\begin{pmatrix} i-1-\omega & 2i & 0 \\ 2i & -i-1-\omega & 0 \\ 0 & 0 & 1-\omega \end{pmatrix} &= 0 \\ \left[1 + (1+\omega)^2\right](1-\omega) + 4(1-\omega) &= 0 \\ \left[(1+\omega)^2 + 5\right](1-\omega) &= 0 , \end{aligned}$$

le soluzioni e quindi gli autovalori sono

$$\omega_0 = 1 , \qquad \omega_\pm = -1 \pm i\sqrt{5} .$$

Poiché tutti gli operatori sono mutuamente commutanti, indicando con

$$\hat{O} = \omega_0 \hat{P}_0 + \omega_+ \hat{P}_+ + \omega_- \hat{P}_- ,$$

la rappresentazione spettrale dell'operatore $\hat{O}$ in termini dei tre operatori di proiezione $\hat{P}_0$, $\hat{P}_-$ e $\hat{P}_+$ ortogonali e tali che: $\hat{P}_0 + \hat{P}_- + \hat{P}_+ = \hat{I}$, le rappresentazioni spettrali degli altri sono

$$\begin{aligned}
\hat{A} &= \mathrm{Re}\,(\omega_0)\,\hat{P}_0 + \mathrm{Re}\,(\omega_+)\,\hat{P}_+ + \mathrm{Re}\,(\omega_-)\,\hat{P}_-\,,\\
\hat{B} &= \mathrm{Im}\,(\omega_0)\,\hat{P}_0 + \mathrm{Im}\,(\omega_+)\,\hat{P}_+ + \mathrm{Im}\,(\omega_-)\,\hat{P}_-\,,\\
\hat{M} &= |\omega_0|\,\hat{P}_0 + |\omega_+|\,\hat{P}_+ + |\omega_-|\,\hat{P}_-\,,\\
\hat{F} &= \arg(\omega_0)\,\hat{P}_0 + \arg(\omega_+)\,\hat{P}_+ + \arg(\omega_-)\,\hat{P}_-\,.
\end{aligned}$$

In definitiva, indicando con $\sigma_O = \left\{1, -1 + i\sqrt{5}, -1 - i\sqrt{5}\right\}$ lo spettro discreto dell'operatore $\hat{O}$, gli spettri discreti degli operatori restanti sono

$$\sigma_A = \{1, -1, -1\}\,, \qquad \sigma_B = \left\{0, \sqrt{5}, -\sqrt{5}\right\}\,, \qquad \sigma_M = \left\{1, \sqrt{6}, \sqrt{6}\right\}\,, \qquad \sigma_F = \left\{0, \pi - \arctan\left(\sqrt{5}\right), \pi + \arctan\left(\sqrt{5}\right)\right\}\,,$$

dove si è utilizzata la determinazione principale $[0, 2\pi)$.

Quinto problema (punteggio massimo: 6/30)

Si ottenga l'espressione analitica della funzione $\heartsuit(x) \in L^2(\mathbb{R})$ che verifica l'equazione integro-differenziale

$$\frac{d\heartsuit}{dx}(x) = \int_{-\infty}^{x} \heartsuit(y)dy - \int_{x}^{\infty} \heartsuit(y)dy + \mathrm{Segno}(x)\,.$$

Soluzione del quinto problema

Riscriviamo la somma dei due integrali a secondo membro come convoluzione della funzione $\heartsuit(x)$ con la funzione segno, ovvero

$$\frac{d\heartsuit}{dx}(x) = \int_{-\infty}^{x} \heartsuit(y)dy - \int_{x}^{\infty} \heartsuit(y)dy + \mathrm{Segno}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Segno}(x-y)\heartsuit(y)dy + \mathrm{Segno}(x)\,.$$

Calcoliamo la trasformata di Fourier di ambo i membri

$$ik\,\tilde{\heartsuit}(k) = \sqrt{2\pi}\,\tilde{\heartsuit}(k)\,\mathscr{F}_k\,[\,\mathrm{Segno}\,] + \mathscr{F}_k\,[\,\mathrm{Segno}\,]\,,$$

risolviamo rispetto alla trasformata di Fourier della funzione $\heartsuit(x)$

$$\tilde{\heartsuit}(k) = \frac{\mathscr{F}_k\,[\,\mathrm{Segno}\,]}{ik - \sqrt{2\pi}\,\mathscr{F}_k\,[\,\mathrm{Segno}\,]}\,.$$

La trasformata di Fourier della funzione segno si può ottenere usando la derivata prima della sua definizione in termini della funzione gradino di Heaviside, cioè

$$\frac{d\,\mathrm{Segno}}{dx}(x) = \frac{d}{dx}\,(2\theta(x) - 1) = 2\delta(x)\,,$$

coincidente con il doppio della delta di Dirac. La trasformata di Fourier è

$$\mathscr{F}_k\left[\frac{d\,\mathrm{Segno}}{dx}\right] = 2\mathscr{F}_k\,[\,\delta\,] \quad \Rightarrow \quad ik\mathscr{F}_k\,[\,\mathrm{Segno}\,] = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \quad \Rightarrow \quad \mathscr{F}_k\,[\,\mathrm{Segno}\,] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{ik}\,.$$

Si ha

$$\tilde{\heartsuit}(k) = \frac{\mathscr{F}_k\,[\,\mathrm{Segno}\,]}{ik - \sqrt{2\pi}\,\mathscr{F}_k\,[\,\mathrm{Segno}\,]} = \frac{\sqrt{2/\pi}/(ik)}{ik - \sqrt{2\pi}\,\sqrt{2/\pi}/(ik)} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{k^2+2}\,.$$

Facendo l'anti-trasformata di Fourier si arriva alla soluzione. La funzione ottenuta è una funzione Lorentziana la sua trasformata di Fourier è nota ed ha la forma dell'esponenziale del modulo della variabile. Esplicitamente si ha

$$\mathscr{F}_{-x}\left[\frac{1}{k^2+2}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k^2+2}dk = \frac{1}{4i\sqrt{\pi}}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k - \sqrt{2}i}dk - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k + \sqrt{2}i}dk\right)\,,$$

per il calcolo degli integrali usiamo il Lemma di Jordan, ovvero

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k \pm \sqrt{2}i} dk = \lim_{R\to\infty} \left(\int_{-R}^{R} \frac{e^{ikx}}{k \pm \sqrt{2}i} dk + \int_{\mathrm{Segno}(x)\, C_R^{\mathrm{Segno}(x)}} \frac{e^{iux}}{u \pm \sqrt{2}i} du \right),$$

dove $C_R^{\mathrm{Segno}(x)}$ è la semicirconferenza centrata nell'origine di raggio R appartenente al semipiano della parti immaginarie che positive se $\mathrm{Segno}(x) > 0$, negative se $\mathrm{Segno}(x) < 0$. Usiamo il teorema dei residui, avendo che la funzione integranda ha una sola singolarità, un polo semplice in $u = \pm\sqrt{2}i$ e considerando l'orientamento del percorso complessivo chiuso, specificato dalla funzione $\mathrm{Segno}(x)$ di fronte al simbolo $C_R^{\mathrm{Segno}(x)}$, la differenza degli integrali e quindi la trasformata di Fourier della funzione Lorentziana vale

$$\mathscr{F}_{-x}\left[\frac{1}{k^2+2}\right] = \frac{1}{4i\sqrt{\pi}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k-\sqrt{2}i} dk - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k+\sqrt{2}i} dk \right) = \frac{2i\pi}{4i\sqrt{\pi}} \left(\theta(x) e^{-\sqrt{2}x} + \theta(-x) e^{\sqrt{2}x} \right).$$

Possiamo esprimere gli esponenziali in termini del modulo $|x|$ così da avere un'unica espressione, cioè

$$\mathscr{F}_{-x}\left[\frac{1}{k^2+2}\right] = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\sqrt{2}|x|}.$$

Infine, la funzione che verifica l'equazione integro-differenziale è

$$\heartsuit(x) = \mathscr{F}_{-x}\left[\tilde{\heartsuit}\right] = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \mathscr{F}_{-x}\left[\frac{1}{k^2+2}\right] = -\frac{e^{-\sqrt{2}|x|}}{\sqrt{2}}.$$

Sesto problema (punteggio massimo: 6/30)

In uno spazio di Hilbert a due dimensioni si consideri l'operatore

$$\hat{☹} = \hat{\sigma}_1 + \hat{\sigma}_2 + \hat{\sigma}_3,$$

dove $\hat{\sigma}_1$, $\hat{\sigma}_2$ e $\hat{\sigma}_3$ sono gli operatori di Pauli, le cui rappresentazioni matriciali rispetto alla base canonica $\{|z_+\rangle, |z_-\rangle\}$ degli autovettori di $\hat{\sigma}_3$ sono

$$\hat{\sigma}_1 \overset{z}{\hookleftarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\sigma}_2 \overset{z}{\hookleftarrow} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\sigma}_3 \overset{z}{\hookleftarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dopo aver ottenuto l'espressione in termini degli operatori identità $\hat{I}$ e $\hat{☹}$ dell'operatore somma della serie

$$\hat{☺} = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{☹}^{-k},$$

se ne determinino lo spettro discreto e le rappresentazioni degli autovettori rispetto alla base canonica $\{|z_+\rangle, |z_-\rangle\}$.

Soluzione del sesto Problema

Gli operatori si Pauli sono hermitiani e unitari, hanno quindi quadrati coincidenti con l'operatore identità, inoltre anti-commutano, ovvero l'anti-commutatore di due operatori di Pauli diversi è nullo. Ne consegue il quadrato dell'operatore $\hat{☹}$ è proporzionale all'operatore identità, infatti si ha

$$\hat{☹}^2 = \underbrace{\hat{\sigma}_1^2}_{\hat{I}} + \underbrace{\hat{\sigma}_3^2}_{\hat{I}} + \underbrace{\hat{\sigma}_3^2}_{\hat{I}} + \underbrace{\hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2 + \hat{\sigma}_2\hat{\sigma}_1}_{\{\hat{\sigma}_1,\hat{\sigma}_2\}=0} + + \underbrace{\hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_3 + \hat{\sigma}_3\hat{\sigma}_1}_{\{\hat{\sigma}_1,\hat{\sigma}_3\}=0} + + \underbrace{\hat{\sigma}_3\hat{\sigma}_3 + \hat{\sigma}_3\hat{\sigma}_3}_{\{\hat{\sigma}_3,\hat{\sigma}_3\}=0} = 3\hat{I},$$

da cui seguono le espressioni per le generiche potenze pari e dispari

$$\hat{☹}^{2m} = 3^m \hat{I}, \qquad \hat{☹}^{2m+1} = 3^m \hat{A}, \qquad \forall\, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Inoltre, dall'espressione del quadrato dell'operatore $\hat{☹}$ si ottiene quella del suo inverso $\hat{☹}^{-1}$, definito dalle identità

$$\hat{☹}\hat{☹}^{-1} = \hat{☹}^{-1}\hat{☹} = \hat{I},$$

infatti, poiché $\hat{\frownie}^2 = \hat{\frownie}\hat{\frownie} = 3\hat{I}$, si ha

$$\frac{\hat{\frownie}^2}{3} = \hat{\frownie}\frac{\hat{\frownie}}{3} = \hat{I} \qquad \Rightarrow \qquad \hat{\frownie}^{-1} = \frac{\hat{\frownie}}{3}\,,$$

l'inverso è pari a un terzo dello stesso operatore.
La serie può essere riscritta usando questo risultato e le espressioni per le potenze pari e dispari dell'operatore $\hat{\frownie}$,

$$\hat{\smiley} = \sum_{j=0}^{\infty}\left(\hat{\frownie}^{-1}\right)^{2j} + \sum_{j=0}^{\infty}\left(\hat{\frownie}^{-1}\right)^{2j+1} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{\hat{\frownie}^{2j}}{3^{2j}} + \sum_{j=0}^{\infty}\frac{\hat{\frownie}^{2j+1}}{3^{2j+1}} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{3^j}{3^{2j}}\hat{I} + \sum_{j=0}^{\infty}\frac{3^j}{3^{2j+1}}\hat{\frownie} = \hat{I}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{3^j} + \frac{\hat{\frownie}}{3}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{3^j}\,,$$

la serie geometrica di ragione $1/3$ converge a $3/2$, quindi, si ha

$$\hat{\smiley} = \frac{3}{2}\hat{I} + \frac{1}{2}\hat{\frownie}\,,$$

che rappresenta l'espressione richiesta dell'operatore somma della serie in termini dell'operatore identità e dell'operatore dato $\hat{\frownie}$.
La matrice che lo rappresenta rispetto alla base canonica $\{|z_+\rangle, |z_-\rangle\}$ è

$$\hat{\smiley} \stackrel{z}{\hookleftarrow} \smiley = \begin{pmatrix} 2 & (1-i)/2 \\ (1+i)/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori, ovvero gli elementi dello spettro discreto sono le soluzioni dell'equazione secolare

$$\begin{aligned} \det(\smiley - \sigma I) &= 0 \\ \det\begin{pmatrix} 2-\sigma & (1-i)/2 \\ (1+i)/2 & 1-\sigma \end{pmatrix} &= 0 \\ \sigma^2 - 3\sigma + \frac{3}{2} &= 0\,, \end{aligned}$$

si hanno i due autovalori

$$\sigma_\pm = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}\,.$$

Indichiamo con $s_\pm$ i vettori 1×2 che rappresentano gli autovettori rispetto alla base canonica $\{|z_+\rangle, |z_-\rangle\}$, per cui si hanno le due equazioni matriciali agli autovalori

$$\smiley s_\pm = \sigma_\pm s_\pm\,,$$

le componenti si ottengono come soluzioni dei due sistemi omogenei

$$\begin{pmatrix} 2-\sigma_\pm & (1-i)/2 \\ (1+i)/2 & 1-\sigma_\pm \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_\pm^1 \\ s_\pm^2 \end{pmatrix} = 0\,,$$

dove $s_\pm^j$, con $j = 1, 2$, è la j-esima componente contro-variante dell'autovettore $s_\pm$. Dalle prime equazioni si ottengono le espressioni per le seconde componenti

$$s_\pm^2 = -2s_\pm^1\frac{2-\sigma_\pm}{1-i} = -s_\pm^1(2-\sigma_\pm)(1+i) = \begin{cases} -s_+^1(2-\sigma_+)(1+i) = -s_+^1\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}(1+i) & \text{segno } + \\[2ex] -s_-^1(2-\sigma_-)(1+i) = -s_-^1\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}(1+i) & \text{segno } - \end{cases}.$$

Fissiamo i valori di s_+^1 e s_-^1 in modo da normalizzare gli autovettori all'unità, si hanno

$$s_\pm^1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \left|\frac{1\mp\sqrt{3}}{2}(1+i)\right|^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4\mp2\sqrt{3}}{4}2}} = \frac{1}{\sqrt{3\mp\sqrt{3}}}\,.$$

L'espressioni per le rappresentazioni degli autovettori è

$$s_\pm = \frac{1}{\sqrt{2\mp\sqrt{3}}}\begin{pmatrix} 1 \\ -\left(1\mp\sqrt{3}\right)(1+i)/2 \end{pmatrix}.$$