

METODI MATEMATICI PER LA FISICA

PROVA SCRITTA - 19 GIUGNO 2019

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che verranno valutati:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo.

PRIMO PROBLEMA (PUNTEGGIO: 6/30)

Si calcoli l'integrale

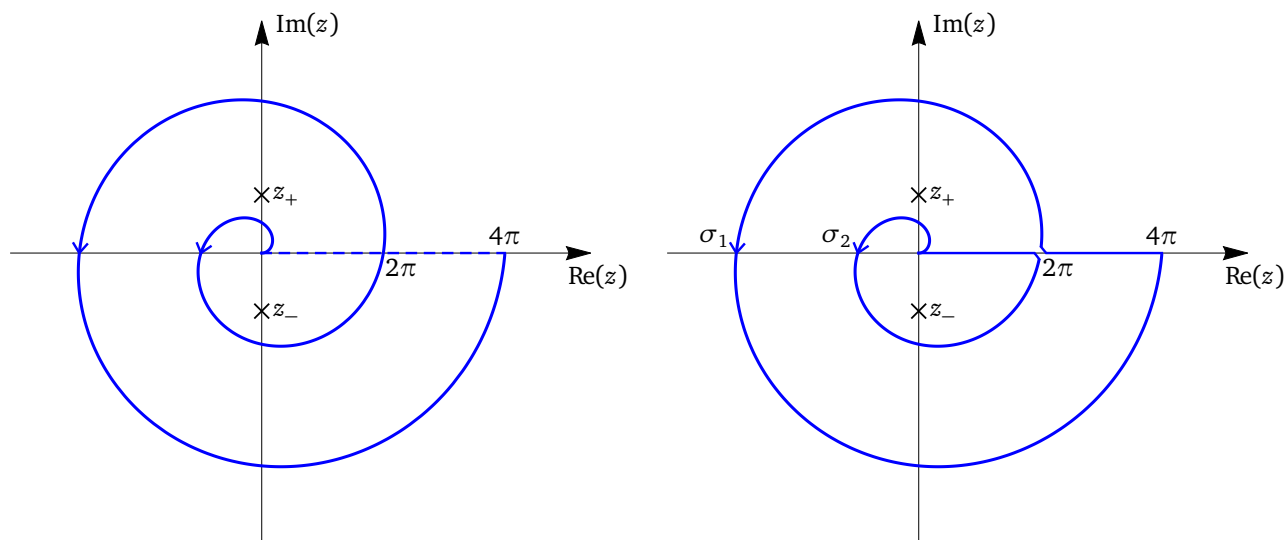
$$S = \int_{\sigma} \frac{dz}{z^2 + 9},$$

con

$$\sigma = \{z : z = r e^{ir}, r \in [0, 4\pi]\}.$$

SOLUZIONE DEL PRIMO PROBLEMA

Il percorso di integrazione σ è la spirale mostrata nella figura di sinistra, è orientata secondo il verso di percorrenza che va dall'estremo interno, l'origine, a quello esterno, il punto $z = 4\pi$.



La funzione integranda ha due poli semplici nei punti

$$z_{\pm} = \pm 3i,$$

che sono indicati in figura dal simbolo "x". Chiudiamo il percorso di integrazione congiungendone gli estremi con il segmento reale $[0, 4\pi]$, orientato da destra verso sinistra, e, usando il teorema dei residui, calcoliamo l'integrale

$$C = \oint_{\sigma \cup (-[0, 4\pi])} \frac{dz}{z^2 + 9} = 2i\pi (R_+ + 2R_-),$$

dove R_{\pm} è il residuo del polo z_{\pm}

$$R_{\pm} = \operatorname{Res} \left[\frac{1}{z^2 + 9}, z_{\pm} \right] = \frac{z_{\pm}^{-1}}{2} = \mp \frac{i}{6}.$$

Come mostrato in dettaglio nella figura di destra, il percorso chiuso σ può essere scomposto in due percorsi chiusi σ_1 e σ_2 , cioè

$$\sigma \cup (-[0, 4\pi]) = \sigma_1 \cup \sigma_2,$$

così da evidenziare meglio il fatto che l'indice di avvolgimento della curva chiusa completa è pari ad uno per il polo z_+ , avvolto solo da σ_1 e pari a due per z_- , avvolto sia da σ_1 che σ_2 , il che giustifica il fattore due di R_- . L'integrale C vale

$$C = \frac{2i\pi}{6} (-i + 2i) = -\frac{\pi}{3}.$$

D'altro canto lo stesso integrale C non è altre che la somma dell'integrale cercato S e di quello della stessa integranda sul segmento $[0, 4\pi]$, orientato da destra verso sinistra, cioè

$$C = S + \int_{-[0, 4\pi]} \frac{dz}{z^2 + 9} = S - \int_0^{4\pi} \frac{dx}{x^2 + 9},$$

da cui

$$S = C + \int_0^{4\pi} \frac{dx}{x^2 + 9}.$$

L'ultimo integrale si calcola osservando che la primitiva è la funzione arcotangente nella variabile $x/3$. Infatti, senza fare sostituzioni, mettendo in evidenza 9 a denominatore, si ha

$$\int_0^{4\pi} \frac{dx}{x^2 + 9} = \frac{1}{3} \int_0^{4\pi} \frac{dx/3}{(x/3)^2 + 1} = \frac{1}{3} \arctan \left(\frac{4\pi}{3} \right).$$

In definitiva l'integrale S vale

$$S = \frac{1}{3} \arctan \left(\frac{4\pi}{3} \right) - \frac{\pi}{3}.$$

SECONDO PROBLEMA (PUNTEGGIO 6/30)

Si ottenga il valore principale dell'integrale

$$Q = \operatorname{Pr} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1) \cos(x)}.$$

SOLUZIONE DEL SECONDO PROBLEMA

La funzione integranda ha infiniti poli semplici appartenenti al percorso di integrazione, corrispondenti agli zeri della funzione coseno, che sono i multipli dispari, positivi e negativi di $\pi/2$, i punti dell'insieme $\{x_k = (2k + 1)\pi/2\}_{k \in \mathbb{Z}}$. Il valore principale si riferisce a queste singolarità. In aggiunta si hanno anche i due poli semplici $z_{\pm} = \pm i$, dovuti al polinomio di secondo grado a denominatore. Possiamo considerare il percorso "dentato" e chiuso nel semipiano delle parti immaginarie positive, mostrato in figura nel caso $n = 2$,

$$\Omega_n = \left\{ \bigcup_{k=-n-1}^n \left([k\pi, (2k + 1)\pi/2 - \epsilon] \cup (-\gamma_k) \cup [(2k + 1)\pi/2 + \epsilon, (k + 1)\pi] \right) \right\} \cup \Gamma_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

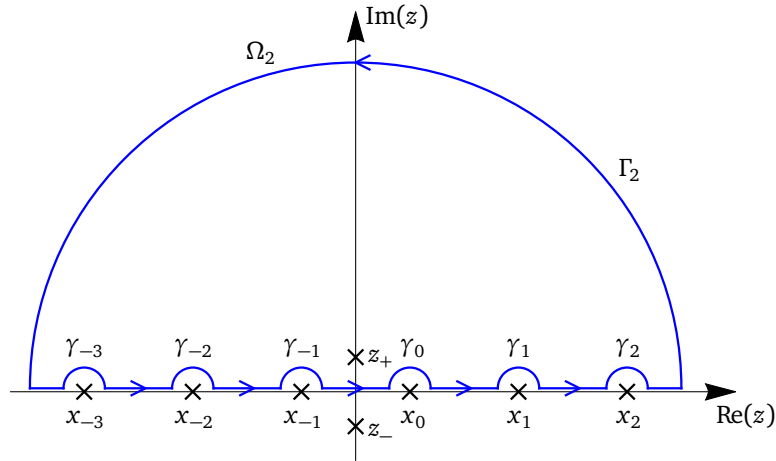
dove l'arco

$$\gamma_k = \{z : z = (2k + 1)\pi/2 + \epsilon e^{i\theta}, \theta \in (0, \pi)\},$$

è una semicirconferenza centrata nel polo x_k di raggio ϵ , mentre

$$\Gamma_n = \{z : z = (n + 1)\pi e^{i\theta}, \theta \in (0, \pi)\},$$

è la semicirconferenza centrata nell'origine di raggio $(n + 1)\pi$.



Il contributo dell'arco Γ_n è infinitesimo nel limite $n \rightarrow \infty$, infatti, con $z \in \Gamma_n$, si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z}{(z^2 + 1) \cos(z)} \stackrel{\text{unif.}}{=} 0,$$

che, posto $z = (n + 1)\pi e^{i\theta}$, segue dalla minorazione

$$\left| \frac{z}{(z^2 + 1) \cos(z)} \right| \leq \frac{(n + 1)\pi}{[(n + 1)^2 \pi^2 - 1]} \equiv \mu_n,$$

dove abbiamo usato $|\cos(z)| \geq 1$ (si veda l'Addendum). Poiché la funzione μ_n è infinitesima nel limite $n \rightarrow \infty$ si ha il limite uniforme richiesto. L'integrale in valore principale può essere ottenuto come

$$\begin{aligned} Q &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\oint_{\Omega_n} \frac{dz}{(z^2 + 1) \cos(z)} - \sum_{j=-n-1}^n \int_{-\gamma_j} \frac{dz}{(z^2 + 1) \cos(z)} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\oint_{\Omega_n} \frac{dz}{(z^2 + 1) \cos(z)} + \sum_{j=-n-1}^n \int_{\gamma_j} \frac{dz}{(z^2 + 1) \cos(z)} \right), \end{aligned}$$

ovvero come l'integrale sul percorso completo cui vanno sottratti i contributi degli archi che aggirano i poli reali, il contributo dell'arco centrato nell'origine è nullo per $n \rightarrow \infty$.

Gli integrali sugli archi γ_j sono

$$\int_{\gamma_j} \frac{dz}{(z^2 + 1) \cos(z)} = i\pi \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{z - (2j + 1)\pi/2}{(z^2 + 1) \cos(z)} = \frac{(-1)^{j+1} i\pi}{(2j + 1)^2 \pi^2 / 4 + 1},$$

dove il limite è inteso per valori di $z \in \gamma_j$. L'integrale sul percorso chiuso Ω_n può essere calcolato con il teorema dei residui e, $\forall n \in \mathbb{N}$, si ha

$$\oint_{\Omega_n} \frac{dz}{(z^2 + 1) \cos(z)} = 2i\pi \text{Res} \left[\frac{1}{(z^2 + 1) \cos(z)}, z = i \right] = \frac{\pi}{\cos(i)} = \frac{\pi}{\cosh(1)},$$

da cui si ottiene l'integrale in valore principale

$$Q = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\oint_{\Omega_n} \frac{dz}{(z^2 + 1) \cos(z)} + \sum_{j=-n-1}^n \int_{\gamma_j} \frac{dz}{(z^2 + 1) \cos(z)} \right) = \frac{\pi}{\cosh(1)} + \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1} i \pi}{(2j+1)^2 \pi^2 / 4 + 1}$$

$$= \frac{\pi}{\cosh(1)} - i \pi \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)^2 \pi^2 / 4 + 1}.$$

La serie può essere calcolata separando i due contributi con indici non negativi, $j = 0, 1, \dots$ e negativi, $k = -1, -2, \dots$, per i quali si fa la sostituzione $j' = -k - 1$, ovvero

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)^2 \pi^2 / 4 + 1} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)^2 \pi^2 / 4 + 1} + \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2 \pi^2 / 4 + 1}$$

$$\{j' = -k - 1\} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)^2 \pi^2 / 4 + 1} + \sum_{j'=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j'+1}}{(2j'+1)^2 \pi^2 / 4 + 1}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)^2 \pi^2 / 4 + 1} - \sum_{j'=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j'}}{(2j'+1)^2 \pi^2 / 4 + 1}$$

$$= 0.$$

Alla luce di questo risultato l'integrale cercato vale

$$Q = \frac{\pi}{\cosh(1)}.$$

ADDENDUM: STUDIO DELLA FUNZIONE $|\cos(n\pi e^{i\theta})|^2$

Consideriamo la funzione

$$f(\theta) = |\cos(n\pi e^{i\theta})|^2, \quad n \in \mathbb{N},$$

la derivata prima, così come la funzione stessa, è periodica con periodo 2π . In realtà, sviluppando il modulo quadro si ha per $f(\theta)$ l'espressione

$$f(\theta) = |\cos(n\pi \cos(\theta) + i n \pi \sin(\theta))|^2$$

$$= |\cos(n\pi \cos(\theta)) \cos(i n \pi \sin(\theta)) - \sin(n\pi \cos(\theta)) \sin(i n \pi \sin(\theta))|^2$$

$$= |\cos(n\pi \cos(\theta)) \cosh(n\pi \sin(\theta)) - i \sin(n\pi \cos(\theta)) \sinh(n\pi \sin(\theta))|^2$$

$$= \cos^2(n\pi \cos(\theta)) \cosh^2(n\pi \sin(\theta)) + \sin^2(n\pi \cos(\theta)) \sinh^2(n\pi \sin(\theta))$$

$$= \cos^2(n\pi \cos(\theta)) \cosh^2(n\pi \sin(\theta)) + [1 - \cos^2(n\pi \cos(\theta))] \sinh^2(n\pi \sin(\theta))$$

$$= \sinh^2(n\pi \sin(\theta)) + \cos^2(n\pi \cos(\theta)),$$

da cui si evince che il periodo è in realtà pari a π , ovvero $f(\theta) = f(\theta + k\pi)$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Studiamo quindi la funzione nell'intervallo $\theta \in [0, \pi)$, le derivate prima e seconda sono

$$f'(\theta) = 2n\pi \cos(\theta) \sinh(n\pi \sin(\theta)) \cosh(n\pi \sin(\theta)) + 2n\pi \sin(\theta) \cos(n\pi \cos(\theta)) \sin(n\pi \cos(\theta))$$

$$= n\pi [\cos(\theta) \sinh(2n\pi \sin(\theta)) + \sin(\theta) \sin(2n\pi \cos(\theta))];$$

$$f''(\theta) = n\pi [-\sin(\theta) \sinh(2n\pi \sin(\theta)) + 2n\pi \cos^2(\theta) \cosh(2n\pi \sin(\theta))$$

$$+ \cos(\theta) \sin(2n\pi \cos(\theta)) - 2n\pi \sin^2(\theta) \cos(2n\pi \cos(\theta))].$$

La derivata prima è nulla sia per $\sin(\theta) = 0$, in quanto si annullano i due termini proporzionali a $\sinh(2n\pi \sin(\theta))$ e $\sin(\theta)$, che per $\cos(\theta) = 0$, infatti il primo termine è proporzionale a $\cos(\theta)$, mentre il secondo lo è a $\sin(2n\pi \cos(\theta))$. Ne consegue che i punti estremali, cioè i punti in cui si annulla la derivata prima, sono i multipli di $\pi/2$. I valori della derivata seconda in questi punti

$$f''(k\pi/2) = \begin{cases} 2n^2 \pi^2 & |k| \text{ pari} \Rightarrow \sin(k\pi/2) = 0, \quad \cos(k\pi/2) = (-1)^k \\ n\pi [-\sinh(2n\pi) - 2n\pi] & |k| \text{ dispari} \Rightarrow \sin(k\pi/2) = (-1)^k, \quad \cos(k\pi/2) = 0 \end{cases},$$

per $n \in \mathbb{N}$, sono strettamente positivi nei multipli pari di $\pi/2$, strettamente negativi nei multipli dispari, ne consegue che i primi sono minimi, i secondi sono invece massimi. Si tratta di minimi e massimi assoluti poiché la funzione è limitata e periodica. I valori minimo e massimo nell'intervallo considerato sono

$$\begin{aligned} f_{\min} &= f(k\pi) = |\cos(n\pi e^{ik\pi})|^2 = |\cos(n\pi(-1)^k)|^2 = |\cos(n\pi)|^2 = |(-1)^n|^2 = 1, \\ f_{\max} &= f((2k+1)\pi/2) = |\cos(n\pi e^{(2k+1)i\pi/2})|^2 = |\cos(n\pi i(-1)^k)|^2 = |\cos(n\pi i)|^2 \\ &= \cosh^2(n\pi) = \sinh^2(n\pi) + 1 > 1. \end{aligned}$$

Ne consegue che in generale si ha

$$f_{\min} = 1 \leq f(\theta) = |\cos(n\pi e^{i\theta})|^2 \leq \cosh^2(n\pi) = f_{\max}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

dove, per la parità della funzione coseno abbiamo esteso la relazione a tutti valori relativi di n .

TERZO PROBLEMA (PUNTEGGIO 6/30)

Nel dominio D_0 la funzione $f(z)$ è data dalla rappresentazione

$$R_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (3e^{ik\pi} - 1)z^k,$$

ovvero si ha $f(z) = R_0(z)$, $\forall z \in D_0$. Dopo aver determinato il dominio D_0 , si calcolino le serie di Laurent $R_+(z)$ e $R_-(z)$ della stessa funzione $f(z)$ centrate in $z_+ = 1$ e $z_- = -1$, convergenti in $z_c = 2$, specificandone i domini D_+ e D_- .

SOLUZIONE DEL TERZO PROBLEMA

La serie della rappresentazione data può essere calcolata, si tratta, infatti, della somma di due serie geometriche

$$R_0(z) = 3 \sum_{k=0}^{\infty} (e^{i\pi z})^k - \sum_{k=0}^{\infty} z^k,$$

entrambe le serie convergono nel cerchio unitario che quindi rappresenta il dominio di convergenza di $R_0(z)$, cioè $D_0 = \{z : |z| < 1\}$. La somma della serie iniziale dà la funzione $f(z)$

$$f(z) = \frac{3}{1 - e^{i\pi z}} - \frac{1}{1 - z} = \frac{3}{z + 1} + \frac{1}{z - 1}.$$

La serie di Laurent centrata in $z = z_+ = 1$ si ottiene sviluppando solo il primo termine, il secondo è già nella forma desiderata. Sommando e sottraendo il numero 1 a denominatore del primo termine si ha

$$f(z) = \frac{3}{z + 1} + \frac{1}{z - 1} = \frac{3}{2 + z - 1} + \frac{1}{z - 1}.$$

Possiamo scrivere il primo termine come somma di una serie geometrica di ragione proporzionale a $(z - 1)$ o al suo inverso a seconda del dominio di convergenza. Mettendo in evidenza a denominatore del primo termine il numero 2 o $(z - 1)$ si hanno per il primo termine le due espressioni

$$\frac{3}{2 + z - 1} = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{3}{1 + \frac{z-1}{2}} = \frac{3}{2} \sum_{j=0}^{\infty} \left(-\frac{z-1}{2}\right)^j & |z-1| < 2 \\ \frac{1}{z-1} \frac{3}{1 + \frac{2}{z-1}} = \frac{1}{z-1} \sum_{j=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{z-1}\right)^j & |z-1| > 2 \end{cases}.$$

La scelta va fatta alla luce della richiesta di convergenza nel punto $z_c = 2$, ovvero dovremmo richiedere che la ragione della serie valutata in $z = z_c$ sia in modulo minore di uno. Quindi se $|z_c - 1|$ risulta maggiore di 2 dovremmo scegliere il primo caso, altrimenti il secondo. Poiché $|z_c - 1| = |2 - 1| = 1 < 2$, la serie di Laurent $R_+(z)$ è

$$R_+(z) = \frac{1}{z - 1} + \frac{3}{2} \sum_{j=0}^{\infty} \left(-\frac{z-1}{2}\right)^j = \frac{1}{z - 1} + \frac{3}{2} \sum_{j=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^j (z - 1)^j.$$

La serie di Laurent può essere posta nella forma generale

$$R_+(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^+(z-1)^k,$$

con i coefficienti dati dalla legge molteplice

$$a_k^+ = \begin{cases} 0 & k < -1 \\ 1 & k = -1 \\ \frac{3}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^k & k > -1 \end{cases}.$$

Il dominio di convergenza è la corona circolare

$$D_+ = \{z : 0 < |z-1| < 2\}.$$

Per la serie di Laurent centrata in $z = z_- = -1$ usiamo lo stesso argomento, in questo caso è il primo termine ad essere già nella forma corretta, per il secondo si procede sommando e sottraendo il numero 1 a denominatore

$$f(z) = \frac{3}{z+1} + \frac{1}{z+1-2}.$$

Scriviamo il secondo termine come somma della serie geometrica con ragione direttamente o inversamente proporzionale a $(z+1)$ a seconda della convergenza richiesta. I due casi sono distinti dal verificarsi, rispettivamente, di una delle due condizioni esclusive $|z+1| < 2$ e $|z+1| > 2$. Si osserva che in $z = z_c = 2$ è la seconda condizione ad essere verificata, quindi, mettendo in evidenza $(z+1)$ a denominatore del secondo termine si ha

$$\begin{aligned} R_-(z) &= \frac{3}{z+1} + \frac{1}{z+1} \frac{1}{1-\frac{2}{z+1}} = \frac{3}{z+1} + \frac{1}{z+1} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z+1}\right)^j = \frac{3}{z+1} + \sum_{j=0}^{\infty} 2^j (z+1)^{-j-1} \\ &= \frac{3}{z+1} + \sum_{j'=-\infty}^{-1} 2^{-j'-1} (z+1)^{-j'}, \end{aligned}$$

dove si è fatta la sostituzione $j' = -j - 1$.

In forma generale

$$R_-(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^-(z+1)^k,$$

dove i coefficienti sono dati dalla legge molteplice

$$a_k^- = \begin{cases} 2^{-k-1} & k < -1 \\ 4 & k = -1 \\ 0 & k > -1 \end{cases}.$$

Il dominio di convergenza è la corona circolare

$$D_- = \{z : |z+1| > 2\}.$$

QUARTO PROBLEMA (PUNTEGGIO 6/30)

Si determinino gli autovalori e gli autovettori dell'operatore \hat{A} definito in uno spazio di Hilbert E_{2N+1} a $2N+1$ dimensioni dall'azione sui vettori della base ortonormale $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^{2N+1} \subset E_{2N+1}$

$$\hat{A}|e_k\rangle = \alpha_k |e_{2N+2-k}\rangle, \quad k \in \{1, 2, \dots, 2N+1\},$$

con $\alpha_k \neq 0, \forall k \in \{1, 2, \dots, 2N+1\}$.

Si stabilisca, infine, per quali valori α_k l'operatore \hat{A} è hermitiano.

SOLUZIONE DEL QUARTO PROBLEMA

La matrice che rappresenta l'operatore rispetto alla base ortonormale $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^{2N+1}$ data è

$$A = \begin{pmatrix} \langle e_1|\hat{A}|e_1\rangle & \cdots & \langle e_1|\hat{A}|e_{2N-1}\rangle & \langle e_1|\hat{A}|e_{2N}\rangle & \langle e_1|\hat{A}|e_{2N+1}\rangle \\ \langle e_2|\hat{A}|e_1\rangle & \cdots & \langle e_2|\hat{A}|e_{2N-1}\rangle & \langle e_2|\hat{A}|e_{2N}\rangle & \langle e_2|\hat{A}|e_{2N+1}\rangle \\ \langle e_3|\hat{A}|e_1\rangle & \cdots & \langle e_3|\hat{A}|e_{2N-1}\rangle & \langle e_3|\hat{A}|e_{2N}\rangle & \langle e_3|\hat{A}|e_{2N+1}\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle e_{2N+1}|\hat{A}|e_1\rangle & \cdots & \langle e_{2N+1}|\hat{A}|e_{2N-1}\rangle & \langle e_{2N+1}|\hat{A}|e_{2N}\rangle & \langle e_{2N+1}|\hat{A}|e_{2N+1}\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & \alpha_1 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & \cdots & \alpha_3 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & 0 \\ \alpha_{2N+1} & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

si tratta di una matrice anti-diagonale.

È possibile ottenere lo spettro discreto e gli autovettori direttamente dall'equazione agli autovalori

$$\hat{A}|u\rangle = \lambda|u\rangle,$$

usando la decomposizione $|u\rangle = u^k|e_k\rangle$, si hanno

$$[\text{membro sinistro}] = \hat{A}|u\rangle = u^k \hat{A}|e_k\rangle = u^k \alpha_k |e_{2N+2-k}\rangle,$$

$$[\text{membro destro}] = \lambda|u\rangle = \lambda u^j |e_j\rangle,$$

da cui si ottengono le $2N + 1$ equazioni (non c'è somma in k)

$$u^k \alpha_k = \lambda u^{2N+2-k}, \quad k \in \{1, 2, \dots, 2N + 1\}.$$

Si tratta, effettivamente, di N coppie di equazioni indipendenti nelle variabili u^j e u^{2N+2-j} , con $j = 1, 2, \dots, N$, più una singola nella variabile "centrale" u^{N+1} . Più in dettaglio si ha

$$\left\{ \begin{array}{l} u^1 \alpha_1 = \lambda u^{2N+1} \\ u^2 \alpha_2 = \lambda u^{2N} \\ u^3 \alpha_3 = \lambda u^{2N-1} \\ \vdots \\ u^N \alpha_N = \lambda u^{N+2} \\ u^{N+1} \alpha_{N+1} = \lambda u^{N+1} \\ u^{N+2} \alpha_{N+2} = \lambda u^N \\ \vdots \\ u^{2N} \alpha_{2N} = \lambda u^2 \\ u^{2N+1} \alpha_{2N+1} = \lambda u^1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u^1 \alpha_1 = \lambda u^{2N+1} \\ u^{2N+1} \alpha_{2N+1} = \lambda u^1 \\ \\ u^2 \alpha_2 = \lambda u^{2N} \\ u^{2N} \alpha_{2N} = \lambda u^2 \\ \\ \vdots \\ \\ u^N \alpha_N = \lambda u^{N+2} \\ u^{N+2} \alpha_{N+2} = \lambda u^N \\ \\ u^{N+1} \alpha_{N+1} = \lambda u^{N+1} \end{array} \right. .$$

Sfruttando il j -esimo sistema 2×2 , con $j \in \{1, 2, \dots, N\}$, possiamo mettere a zero tutte le componenti diverse da u^j e u^{2N+1-j} e porre $u^j = 1$, in questo modo dal sistema si ottengono due autovalori e una coppia di valori della seconda componente u^{2N+2-j} che definiscono gli autovettori corrispondenti. In dettaglio si ha

$$\left\{ \begin{array}{l} u^j \alpha_j = \lambda u^{2N+1-j} \\ u^{2N+1-j} \alpha_{2N+1-j} = \lambda u^j \end{array} \right. , \quad j \in \{1, 2, \dots, N\},$$

dalle due equazioni, ponendo $u_j = 1$, si ottiene

$$u^{2N+2-j} = \frac{\lambda}{\alpha_{2N+2-j}} = \frac{\alpha_j}{\lambda} \Rightarrow \lambda_{\pm}^{\pm} = \pm \sqrt{\alpha_j \alpha_{2N+2-j}},$$

in corrispondenza dei quali si hanno le componenti

$$u_{\pm}^{2N+2-j} = \pm \sqrt{\frac{\alpha_j}{\alpha_{2N+2-j}}}.$$

Gli autovettori normalizzati corrispondenti ai $2N$ autovalori dell'insieme $\{\lambda_1^+, \lambda_2^+, \dots, \lambda_N^+, \lambda_1^-, \lambda_2^-, \dots, \lambda_N^-\}$ hanno le rappresentazioni matriciali

$$u_j^\pm = \frac{1}{\sqrt{1 + |\alpha_j/\alpha_{2N+2-j}|}} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \pm\sqrt{\alpha_j/\alpha_{2N+2-j}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} j\text{-esima riga} \\ \\ \\ (2N+2-j)\text{-esima riga} \end{matrix}, \quad j \in \{1, 2, \dots, N\}. \quad (1)$$

Infine, dall'equazione singola, azzerando tutte le componenti ad eccezione delle $(N+1)$ -esima $u_{(N+1)}^{N+1}$, che poniamo uguale ad uno, si ottiene l'autovalore λ_{N+1} , cioè

$$u_{(N+1)}^{N+1} \alpha_{N+1} = \lambda_{N+1} u_{(N+1)}^{N+1} \Rightarrow \lambda_{N+1} = \alpha_{N+1}.$$

L'autovettore normalizzato corrispondente ha rappresentazione matriciale

$$u_{N+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} (N+1)\text{-esima riga}. \quad (2)$$

Ricapitolando, lo spettro discreto dell'operatore \hat{A} è rappresentato dall'insieme dei $(2N+1)$ autovalori

$$\{\lambda_1^+, \lambda_2^+, \dots, \lambda_N^+, \lambda_{N+1}, \lambda_1^-, \lambda_2^-, \dots, \lambda_N^-\}, \quad \lambda_j^\pm = \pm\sqrt{\alpha_j \alpha_{2N+2-j}}, \quad j \in \{1, 2, \dots, N\}, \quad \lambda_{N+1} = \alpha_{N+1},$$

cui corrispondono gli autovettori dell'insieme $\{|u_1^+\rangle, |u_2^+\rangle, \dots, |u_N^+\rangle, |u_{N+1}\rangle, |u_1^-\rangle, |u_2^-\rangle, \dots, |u_N^-\rangle\}$, le cui rappresentazioni matriciali rispetto alla base $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^{2N+1}$ sono date nelle equazioni (1) e (2).

Dalla rappresentazione matriciale dell'operatore \hat{A} è facile evincere che la condizione di hermitianità sui parametri α_k , con $k \in \{1, 2, \dots, 2N+1\}$, è data dalle $(N+1)$ equazioni

$$\alpha_j = \alpha_{2N+2-j}^*, \quad j \in \{1, 2, \dots, N\}, \quad \alpha_{N+1} = \alpha_{N+1}^*,$$

ovvero

$$\alpha_j = \alpha_{2N+2-j}^*, \quad j \in \{1, 2, \dots, N, N+1\}.$$

Tale condizioni si ottiene dall'identità

$$A = A^\dagger = (A^*)^T$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & \alpha_1 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & \cdots & \alpha_3 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & 0 \\ \alpha_{2N+1} & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & \alpha_{2N+1}^* \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{2N}^* & 0 \\ 0 & \cdots & \alpha_{2N-1}^* & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & 0 \\ \alpha_1^* & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

In questo caso, come è noto, gli autovalori sono reali, infatti sono radici quadrate di moduli quadri, ovvero di numeri reali non negativi,

$$\lambda_j^\pm = \pm\sqrt{\alpha_j \alpha_{2N+2-j}} = \pm\sqrt{\alpha_j \alpha_j^*} = \pm\sqrt{|\alpha_j|^2} = \pm|\alpha_j| \in \mathbb{R} \quad j \in \{1, 2, \dots, N\},$$

$$\lambda_{N+1} = \alpha_{N+1} \in \mathbb{R}.$$

Gli autovettori corrispondenti alle coppie di autovalori λ_j^\pm , con $j \in \{1, 2, \dots, N\}$, diventano ortogonali. Infatti, usando le rappresentazioni matriciali degli autovettori $|u_j^\pm\rangle$,

$$u_j^+ = \frac{1}{\sqrt{1 + |\alpha_j/\alpha_j^*|}} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \sqrt{\alpha_j/\alpha_j^*} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_j^- = \frac{1}{\sqrt{1 + |\alpha_j/\alpha_j^*|}} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\sqrt{\alpha_j/\alpha_j^*} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

si ha il prodotto scalare

$$\langle v_j^+ | v_j^- \rangle = (v_j^+)^{\dagger} v_j^- = (v_j^{+*})^T v_j^- = \frac{1}{1 + |\alpha_j/\alpha_j^*|} \left(1 - \sqrt{\frac{\alpha_j^*}{\alpha_j}} \sqrt{\frac{\alpha_j}{\alpha_j^*}} \right) = \frac{1}{1 + |\alpha_j/\alpha_j^*|} \left(1 - \sqrt{\frac{|\alpha_j|^2}{|\alpha_j|^2}} \right) = 0,$$

da cui segue l'ortogonalità dei vettori. Ovviamente, come si evince dalle rappresentazioni matriciali, l'autovettore $|u_{N+1}\rangle$, relativo all'autovalore λ_{N+1} , è ortogonale a tutti gli altri $2N$ autovettori, ovvero quelli dell'insieme $\{|u_j^+\rangle, |u_j^-\rangle\}_{j=1}^N$.

QUINTO PROBLEMA (PUNTEGGIO 6/30)

Facendo uso del teorema di Plancherel per le funzioni a quadrato sommabili in \mathbb{R} si dimostri l'identità

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\pi}{x^2 + \pi^2} - e^{-2|x|} \right) \frac{dx}{\cosh(x)} = 0.$$

SOLUZIONE DEL QUINTO PROBLEMA

Il risultato del teorema di Plancherel cui ci si riferisce è

$$(f, g) = (\mathcal{F}_k[f], \mathcal{F}_k[g]),$$

valido $\forall f(x), g(x) \in L^2(\mathbb{R})$, ovvero il prodotto scalare di due funzioni a quadrato sommabili in \mathbb{R} coincide con quello delle trasformate di Fourier, che, per il teorema di Plancherel sono anch'esse funzioni a quadrato sommabili in \mathbb{R} . Il prodotto scalare, $\forall f(x), g(x) \in L^2(\mathbb{R})$, è dato dall'integrale

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)g(x)dx.$$

L'identità da dimostrare può essere posta nella forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{(x^2 + \pi^2) \cosh(x)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2|x|} dx}{\cosh(x)}.$$

L'integrale a primo membro rappresenta il prodotto scalare

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{(x^2 + \pi^2) \cosh(x)} dx = \left(\frac{\pi}{x^2 + \pi^2}, \frac{1}{\cosh(x)} \right) \equiv (f, g),$$

dove abbiamo posto

$$f(x) = \frac{\pi}{x^2 + \pi^2}, \quad g(x) = \frac{1}{\cosh(x)}.$$

Queste funzioni sono a quadrato sommabili in \mathbb{R} , ovvero $f(x), g(x) \in L^2(\mathbb{R})$, possiamo applicare il teorema di Plancherel e avremo

$$(f, g) = \left(\mathcal{F}_k \left[\frac{\pi}{x^2 + \pi^2} \right], \mathcal{F}_k \left[\frac{1}{\cosh(x)} \right] \right).$$

Calcoliamo la trasformata di Fourier

$$\mathcal{F}_k \left[\frac{\pi}{x^2 + \pi^2} \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\pi e^{-ikx}}{x^2 + \pi^2} dx,$$

usando il lemma di Jordan nei due casi $k < 0$ e $k > 0$ e il teorema dei residui per i due poli semplici che la funzione integranda ha nei punti $z = \pm i\pi$, avremo

$$\mathcal{F}_k \left[\frac{\pi}{x^2 + \pi^2} \right] = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{ \begin{array}{l} 2i\pi \operatorname{Res} \left[\frac{e^{-ikz}}{z^2 + \pi^2}, z = i\pi \right] = 2i\pi \frac{e^{k\pi}}{2i\pi} = e^{k\pi} \quad k < 0 \\ -2i\pi \operatorname{Res} \left[\frac{e^{-ikz}}{z^2 + \pi^2}, z = -i\pi \right] = -2i\pi \frac{e^{-k\pi}}{-2i\pi} = e^{-k\pi} \quad k > 0 \end{array} \right\} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\pi|k|}.$$

La trasformata di Fourier dell'inversa della funzione coseno iperbolico,

$$\mathcal{F}_k \left[\frac{1}{\cosh(x)} \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{\cosh(x)} dx,$$

si calcola considerando l'integrale della stessa integranda sul percorso chiuso rettangolare

$$\Gamma_R = [-R, R] \cup [R, R + i\pi] \cup [R + i\pi, -R + i\pi] \cup [-R + i\pi, R],$$

dove il simbolo $[z_1, z_2]$ rappresenta il segmento con estremi nei punti z_1 e z_2 , orientato nel verso che va dal primo al secondo punto. Nel rettangolo Γ_R , $\forall R > 0$, la funzione integranda ha un'unica singolarità, un polo semplice in $z = i\pi/2$, quindi

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{-ikz}}{\cosh(z)} dz = 2i\pi \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{Res} \left[\frac{e^{-ikz}}{\cosh(z)}, z = i\pi/2 \right] = \sqrt{2\pi} e^{k\pi/2}. \quad (3)$$

D'altro canto, l'integrale su Γ_R può essere scritto con somma dei quattro contributi relativi ai quattro tratti rettilinei

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{-ikz}}{\cosh(z)} dz &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{[R, R+i\pi] \cup [-R+i\pi, -R]} \frac{e^{-ikz}}{\cosh(z)} dz + \int_{-R}^R \frac{e^{-ikx}}{\cosh(x)} dx + \int_R^{-R} \frac{e^{-ik(x+i\pi)}}{\cosh(x+i\pi)} dx \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{[R, R+i\pi] \cup [-R+i\pi, -R]} \frac{e^{-ikz}}{\cosh(z)} dz + \int_{-R}^R \frac{e^{-ikx}}{\cosh(x)} dx - e^{k\pi} \int_{-R}^R \frac{e^{-ikx}}{-\cosh(x)} dx \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{[R, R+i\pi] \cup [-R+i\pi, -R]} \frac{e^{-ikz}}{\cosh(z)} dz + (1 + e^{k\pi}) \int_{-R}^R \frac{e^{-ikx}}{\cosh(x)} dx \right). \end{aligned}$$

Nel limite $R \rightarrow \infty$ i contributi dei tratti verticali si annullano e quindi si ottiene un integrale proporzionale alla trasformata di Fourier, ovvero

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{-ikz}}{\cosh(z)} dz = \frac{1 + e^{k\pi}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{\cosh(x)} dx = (1 + e^{k\pi}) \mathcal{F}_k \left[\frac{1}{\cosh(x)} \right].$$

Confrontando questo risultato con quello dell'equazione (3),

$$(1 + e^{k\pi}) \mathcal{F}_k \left[\frac{1}{\cosh(x)} \right] = \sqrt{2\pi} e^{k\pi/2},$$

si ottiene la trasformata di Fourier

$$\mathcal{F}_k \left[\frac{1}{\cosh(x)} \right] = \sqrt{2\pi} \frac{e^{k\pi/2}}{1 + e^{k\pi}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{e^{-k\pi/2} + e^{k\pi/2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cosh(k\pi/2)}.$$

L'identità tra i prodotti scalari delle funzioni e delle trasformate di Fourier diventa

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{(x^2 + \pi^2) \cosh(x)} dx = \left(\mathcal{F}_k \left[\frac{\pi}{x^2 + \pi^2} \right], \mathcal{F}_k \left[\frac{1}{\cosh(x)} \right] \right) = \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\pi|k|}, \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cosh(k\pi/2)} \right) \\ = \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\pi|k|}}{\cosh(k\pi/2)} dk.$$

Facendo, nell'ultimo integrale, il cambiamento di variabile $x = k\pi/2$, così da avere la funzione coseno iperbolico valutata nella variabile di integrazione x , si ottiene l'identità cercata, ovvero

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{(x^2 + \pi^2) \cosh(x)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2|x|}}{\cosh(x)} dx.$$

SESTO PROBLEMA (PUNTEGGIO 6/30)

L'operatore

$$F_x[f] = af(x) + bx^2 \int_{-T}^T y^2 f(y) dy,$$

con $a, b \in \mathbb{C}/\{0\}$ e $T > 0$, è definito $\forall f(x) \in L^2(-T, T)$, ovvero nello spazio vettoriale delle funzioni a quadrato sommabili nell'intervallo $(-T, T) \subset \mathbb{R}$.

Si determinino gli autovalori e le autofunzioni dell'operatore e si stabilisca per quali valori dei parametri non nulli a e b esso diventa un proiettore.

SOLUZIONE DEL SESTO PROBLEMA

L'equazione agli autovalori

$$F_x[f] = af(x) + bx^2 \int_{-T}^T y^2 f(y) dy = \lambda f(x),$$

dove λ è l'autovalore relativo all'autofunzione $f(x)$, può essere riscritta nella forma

$$(\lambda - a)f(x) = bx^2 \int_{-T}^T y^2 f(y) dy,$$

da cui si evince che tutte le funzioni $f(x) \in L^2(-T, T)$ tali che

$$\int_{-T}^T x^2 f(x) dx = (x^2, f) = 0,$$

ovvero ortogonali alla funzione x^2 , sono autofunzioni dell'operatore F_x relative allo stesso autovalore $\lambda = a$. Un'altra classe di autofunzioni è rappresentata da quelle proporzionali ("parallele") alla funzione x^2 , che indichiamo con $g(x) = g_2 x^2$, $\forall g_2 \in \mathbb{C}/\{0\}$. Dall'equazione agli autovalori si ha

$$(\lambda - a)g(x) = (\lambda - a)g_2 x^2 = bx^2 \int_{-T}^T y^2 g(y) dy = g_2 bx^2 \int_{-T}^T y^4 dy = \frac{2T^5 g_2 b}{5} x^2,$$

segue che $g(x)$ è un'autofunzione dell'operatore F_x relativa all'autovalore che verifica l'equazione

$$(\lambda - a)g_2 x^2 = \frac{2T^5 g_2 b}{5} x^2, \quad \forall x \in (-T, T),$$

da cui si ha l'autovalore

$$\lambda = a + \frac{2T^5 b}{5}.$$

In definitiva lo spettro dell'operatore è $\{a, a + 2T^5b/5\}$, ci sono solo due autovalori e soltanto il secondo è non degenere. Normalizzando all'unità, le autofunzioni relative all'autovalore degenere $\lambda = a$ sono quelle dell'insieme $\{f(x) \in L^2(-T, T) : (f, f) = 1 \text{ et } (x^2, f) = 0\}$, mentre per l'autovalore non degenere $\lambda = a + 2T^5b/5$ si ha la sola autofunzione normalizzata $g(x) = \sqrt{\frac{5}{2T^5}} x^2$.

L'operatore diventa un proiettore quando lo spettro contiene solo lo zero e l'unità, nel caso in esame, essendo $a, b \neq 0$, ciò si verifica solo se

$$a = 1, \quad b = -\frac{5}{2T^5},$$

infatti in questo caso lo spettro diventa $\{1, 0\}$ e l'operatore F_x diventa il proiettore nella direzione "ortogonale" a x^2 . Lo verificiamo osservando che la funzione che si ottiene facendo agire l'operatore su una generica $f(x) \in L^2(-T, T)$ rappresenta la componente ortogonale a x^2 della stessa $f(x)$. Infatti, detta $h(x)$ questa componente, cioè

$$h(x) = F_x[f] = f(x) - \frac{5}{2T^5} x^2 \int_{-T}^T y^2 f(y) dy,$$

è facile vedere che il prodotto scalare (x^2, h) è nullo, ovvero

$$(x^2, h) = \int_{-T}^T x^2 \left(f(x) - \frac{5}{2T^5} x^2 \int_{-T}^T y^2 f(y) dy \right) dx = \int_{-T}^T x^2 f(x) dx - \frac{5}{2T^5} \underbrace{\int_{-T}^T x^4 dx}_{2T^5/5} \int_{-T}^T y^2 f(y) dy = 0,$$

quindi $h(x)$ è la componente della funzione $f(x)$ ortogonale a x^2 .