Metodi Matematici per la Fisica

Primo appello estivo - 18 giugno 2024

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che il punteggio assegnato a ciascuna procedura di risoluzione può variare tra lo zero e il massimo indicato ed è stabilito valutando:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo;
6. la bellezza e l'armonia del tutto.

Primo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$ = \mathrm{Pr}\int_{|z|^2=\mathrm{Re}(z^2+2z)} \frac{dz}{(z^2-1)\,\mathrm{senh}(z)}\,, $$

il percorso d'integrazione è orientato in modo tale che le parti immaginarie dei suoi punti siano crescenti.

Curiosità. Il simbolo  rappresenta la lettera "a" del cosiddetto "alfabeto degli uomini danzanti" (*dancing men alphabet*), utilizzato da una banda di criminali in forma di codice segreto nel racconto *The Adventure of the Dancing Men* facente parte della raccolta *The Return of Sherlock Holmes, A Collection of Holmes Adventures* di Sir Arthur Conan Doyle pubblicata nel 1905.

Soluzione del primo problema

Il percorso di integrazione si ottiene dalla condizione $|z|^2 = \mathrm{Re}\left(z^2+2z\right)$, usando la rappresentazione cartesiana $z = x + iy$, con $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, si ha

$$ \begin{aligned} |z|^2 &= \mathrm{Re}\left(z^2+2z\right) \\ x^2+y^2 &= \mathrm{Re}\left(x^2-y^2+2ixy+2x+2iy\right) = x^2-y^2+2x \\ x &= y^2\,. \end{aligned} $$

È l'equazione della parabola avente vertice nell'origine del piano complesso e asse di simmetria coincidente con l'asse reale. La curva è orientata dal quarto verso il primo quadrante, ovvero l'estremo inferiore si ha per parti reali e parti immaginarie tali che: $(x,y)\to(\infty,-\infty)$, quello superiore per: $(x,y)\to(\infty,\infty)$.
La funzione integranda è meromorfa è, infatti, il rapporto di funzioni intere. Ha poli semplici in corrispondenza con gli zeri semplici della funzione a denominatore, ovvero negli zeri del polinomio di secondo grado

$$ z_\pm = \pm 1\,, $$

e in quelli della funzione seno iperbolico, elementi dell'insieme

$$ \{z_k = ik\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}\,. $$

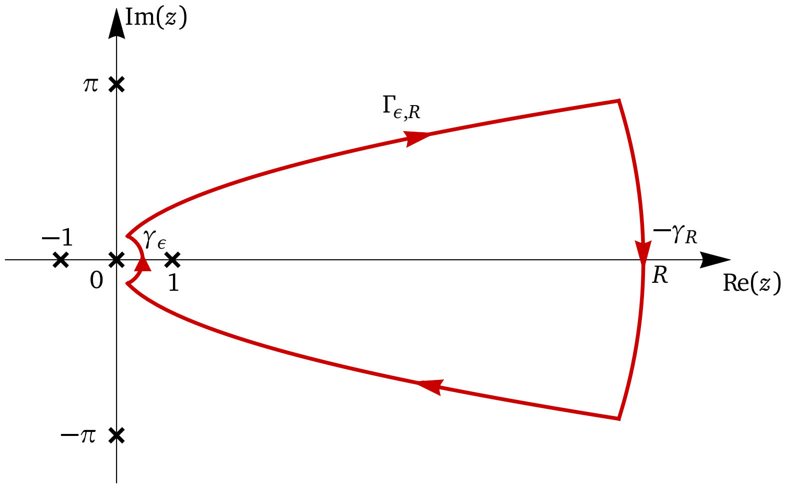
Il polo semplice nell'origine $z_0 = 0$ appartiene al percorso di integrazione ed è quindi rispetto a esso che si considera il valore principale.
Consideriamo la curva chiusa mostrata in figura ottenuta inserendo nella parabola un arco intorno all'origine di raggio $\epsilon < 1$, γ_ϵ, orientato positivamente e chiudendola con un arco concentrico al primo di raggio $R > 1$, γ_R,

orientato negativamente. L'integrale della stessa funzione integranda su questo percorso chiuso, che indichiamo con $\Gamma_{\epsilon,R}$ si ottiene con il teorema dei residui e vale

$$\oint_{\Gamma_{\epsilon,R}} \frac{dz}{(z^2-1)\,\mathrm{senh}(z)} = -2i\pi\,\mathrm{Res}\left[\frac{1}{(z^2-1)\,\mathrm{senh}(z)}, z_+ = 1\right],$$

il segno è conseguenza del orientamento negativo della curva $\Gamma_{\epsilon,R}$. Nei limiti $\epsilon \to 0$ e $R \to \infty$ si ha

$$\lim_{\epsilon\to 0}\lim_{R\to\infty} \oint_{\Gamma_{\epsilon,R}} \frac{dz}{(z^2-1)\,\mathrm{senh}(z)} = \mathcal{I} + \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\gamma_\epsilon} \frac{dz}{(z^2-1)\,\mathrm{senh}(z)} - \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} \frac{dz}{(z^2-1)\,\mathrm{senh}(z)}.$$



La funzione integranda moltiplicata per z sugli archi γ_ϵ e γ_R nei limiti considerati si comporta come

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{z}{(z^2-1)\,\mathrm{senh}(z)} = \lim_{z\to 0} \frac{z}{(z^2-1)\,\mathrm{senh}(z)} = -1,$$
$$\lim_{R\to\infty} \frac{z}{(z^2-1)\,\mathrm{senh}(z)} = 0,$$

ne consegue

$$\lim_{\epsilon\to 0}\lim_{R\to\infty} \oint_{\Gamma_{\epsilon,R}} \frac{dz}{(z^2-1)\,\mathrm{senh}(z)} = \mathcal{I} - i\pi.$$

L'integrale cercato è

$$\mathcal{I} = \lim_{\epsilon\to 0}\lim_{R\to\infty} \oint_{\Gamma_{\epsilon,R}} \frac{dz}{(z^2-1)\,\mathrm{senh}(z)} + i\pi,$$

usando per l'integrale a secondo membro il risultato ottenuto con il teorema dei residui che vale anche nei limiti considerati, si ha

$$\mathcal{I} = -2i\pi\,\mathrm{Res}\left[\frac{1}{(z^2-1)\,\mathrm{senh}(z)}, z_+ = 1\right] + i\pi = -2i\pi\left(\lim_{z\to 1}\frac{z-1}{(z^2-1)\,\mathrm{senh}(z)} + \frac{1}{2}\right) = 2i\pi\left(-\frac{1}{2\,\mathrm{senh}(1)} + \frac{1}{2}\right),$$

infine, risultato è

$$\mathcal{I} = i\pi\left(1 - \frac{1}{\mathrm{senh}(1)}\right).$$

Secondo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si dimostri che la funzione

 $$(z) = z^2 - z + \ln(z) - \frac{1}{2}\,,$$

non ha zeri nel cerchio unitario, assumendo la determinazione principale $\arg(z) \in [0, 2\pi)$.

Curiosità. Il simbolo  rappresenta la lettera "f" dell'alfabeto degli uomini danzanti descritto nel primo problema.

Soluzione del secondo problema

Definiamo le due funzioni

$$f_1(z) = z^2 - z + 1\,, \qquad f_2(z) = \ln(z) - \frac{3}{2}\,,$$

cosicché

 $$(z) = f_1(z) + f_2(z)\,.$$

Calcoliamo i moduli quadri delle funzioni $f_1(z)$ e $f_2(z)$ sulla circonferenza unitaria, ovvero per valori di z tali che $|z| = 1$. Si hanno

$$|f_1(z)|^2 = |z|^4 + |z|^2 - 2\,\mathrm{Re}(z|z|) + 1 + 2\,\mathrm{Re}\left(z^2 - z\right) = 3 - 4\,\mathrm{Re}(z) + 2\,\mathrm{Re}\left(z^2\right) = 3 - 4\cos(\theta) + 2\cos(2\theta)\,,$$

$$|f_2(z)|^2 = \left| i\theta + \frac{3}{2} \right|^2 = \theta^2 + \frac{9}{4}\,,$$

con $\theta = \arg(z) \in [0, 2\pi)$. È immediato verificare, anche graficamente che

$$|f_2(z)| > |f_1(z)|\,,$$

$\forall\, z$ tale che: $|z| = 1$. Usando il teorema di Rouché nel cerchio unitario si che la funzione completa (z) ha lo stesso numero di zeri della funzione $f_2(z)$ all'interno del cerchio unitario. Gli zeri dell funzione $f_2(z)$ sono le soluzioni dell'equazione $f_2(z) = 0$, ovvero

$$\ln(z) = \frac{3}{2} \quad \Longrightarrow \quad \ln|z| + i\theta = \frac{3}{2} \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta = 0 \\ |z| = e^{3/2} \end{array} \right\} \quad \Longrightarrow \quad z = e^{3/2} \simeq 4{,}48 \notin \{z : |z| < 1\}\,,$$

ne consegue che la funzione $f_2(z)$ non ha zeri nel cerchio unitario e, per il teorema di Rouché, ciò è vero anche per la funzione completa (z).

Terzo problema (punteggio massimo: 5/30)

Si calcoli la funzione

 $$(z) = \lim_{n\to\infty} \prod_{j=0}^{n} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + p_k^{-2^j z}\right)\,,$$

con $\mathrm{Re}(z) > 0$ e dove $\{p_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ è la successione dei numeri primi.

Curiosità. Il simbolo  rappresenta la lettera "s" dell'alfabeto degli uomini danzanti descritto nel primo problema.

Soluzione del terzo problema

Moltiplichiamo il prodotto infinito con indice k, per un generico $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ per il prodotto infinito

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - p_k^{-2^j z}\right) = \frac{1}{\zeta\left(2^j z\right)}\,,$$

che rappresenta l'inverso della funzione zeta di Riemann nel punto $2^j z$, la rappresentazione converge poiché, dalla condizione $\mathrm{Re}(z) > 0$ segue $\mathrm{Re}\left(2^j z\right) = 2^j\,\mathrm{Re}\,(z) > 0$. Otteniamo

$$\frac{1}{\zeta\left(2^j z\right)} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + p_k^{-2^j z}\right) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - p_k^{-2^j z}\right) \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + p_k^{-2^j z}\right) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - p_k^{-2^{j+1} z}\right) = \frac{1}{\zeta\left(2^{j+1} z\right)}\,,$$

da cui si ricava l'espressione in termini di un rapporto di funzioni zeta del prodotto infinito, cioè

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+p_k^{-2^j z}\right)=\frac{\zeta\left(2^j z\right)}{\zeta\left(2^{j+1}z\right)}\,,$$

che coincide, appunto, con il termine generico, $\forall\, j\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, del secondo prodotto.
Usando questo risultato, il temine n-esimo della successione, con $n\in\mathbb{N}$, di cui è richiesto il limite può essere scritto come

$$\prod_{j=0}^{n}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+p_k^{-2^j z}\right)=\prod_{j=0}^{n}\frac{\zeta\left(2^j z\right)}{\zeta\left(2^{j+1}z\right)}=\frac{\zeta\,(z)}{\zeta\,(2z)}\frac{\zeta\,(2z)}{\zeta\,(4z)}\cdots\frac{\zeta\,(2^n z)}{\zeta\,(2^{n+1}z)}=\frac{\zeta\,(z)}{\zeta\,(2^{n+1}z)}\,.$$

Infine, poiché, per valori di z tali che $\operatorname{Re}(z)>0$, si ha

$$\lim_{n\to\infty}\zeta\left(2^{n+1}z\right)=1\,,$$

per la funzione richiesta abbiamo

$$\text{𓀠}(z)=\lim_{n\to\infty}\prod_{j=0}^{n}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+p_k^{-2^j z}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\zeta\,(z)}{\zeta\,(2^{n+1}z)}=\zeta\,(z)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\zeta\,(2^{n+1}z)}=\zeta\,(z)\,.$$

Quarto problema (punteggio massimo: 5/30)

L'operatore hermitiano $\hat{G}$, definito nello spazio di Hilbert a tre dimensioni E_3, è tale che

$$\min_{\|\psi\|=1}\left\{\langle\hat{G}\rangle_\psi\right\}=-2\,,\qquad \left\|\hat{G}\right\|=2\,,\qquad \operatorname{Tr}\left(\hat{G}\right)=-2.$$

Sapendo che gli autovettori relativi agli autovalori minimo e massimo sono rispettivamente

$$|v_1\rangle=\frac{|e_1\rangle+2|e_2\rangle+|e_3\rangle}{\sqrt{6}}\,,\qquad |v_3\rangle=\frac{|e_1\rangle-|e_3\rangle}{\sqrt{2}}\,,$$

dove $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^3$ è una base canonica ortonormale dello spazio vettoriale E_3, si determinino la matrice 3×3 G e i vettori 3×1 v_1, v_2 e v_3 che rappresentano l'operatore e i tre autovettori rispetto alla stessa base canonica $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^3$.

Soluzione del quarto problema

L'operatore $\hat{G}$ è hermitiano, quindi normale e diagonalizzabile. Ammette un insieme ortonormale di autovettori $\{|v_k\rangle\}_{k=1}^3$, indicando con $\{\gamma_k\}_{k=1}^3\subset\mathbb{R}$ lo spettro discreto, cioè l'insieme degli autovalori reali, si hanno le equazioni

$$\hat{G}|v_k\rangle=\gamma_k|v_k\rangle\,,\qquad \forall\, k\in\{1,2,3\}\,.$$

L'insieme degli autovettori è una base ortonormale dello spazio vettoriale E_3, segue che, $\forall|\psi\rangle\in E_3$, vale la decomposizione

$$|\psi\rangle=\psi^k|v_k\rangle\,,$$

dove $\psi^k=\langle v_k|\psi\rangle$ è la k-esima componente contro-variante del vettore $|\psi\rangle$ rispetto alla base degli autovettori. Il valore di aspettazione è

$$\langle\hat{G}\rangle_\psi=\langle\psi|\hat{G}|\psi\rangle=\sum_{j,k=1}^3\psi^{j*}\psi^k\langle v_j|\hat{G}|v_k\rangle=\sum_{j,k=1}^3\psi^{j*}\psi^k\gamma_k\underbrace{\langle v_j|v_k\rangle}_{=\delta^j_k}=\sum_{k=1}^3\left|\psi^k\right|^2\gamma_k\,.$$

Gli autovalori sono reali e quindi strettamente ordinati poiché relativi a autovettori ortogonali. Possiamo minorare come

$$\langle\hat{G}\rangle_\psi\geq\min_{j\in\{1,2,3\}}\left\{\gamma_j\right\}\sum_{k=1}^3\left|\psi^k\right|^2\quad\Rightarrow\quad\min_{\|\psi\|=1}\left\{\langle\hat{G}\rangle_\psi\right\}\geq\min_{j\in\{1,2,3\}}\left\{\gamma_j\right\}\,,$$

il valore minimo a secondo membro è raggiunto quando il vettore $|\psi\rangle$ coincide con l'autovettore relativo all'autovalore minimo. In definitiva

$$\min_{\|\psi\|=1}\left\{\langle\hat{G}\rangle_\psi\right\}=\min_{j\in\{1,2,3\}}\left\{\gamma_j\right\}\,,$$

ovvero, secondo i dati del problema, il più piccolo degli autovalori è $\gamma_1=-2$.
Dal valore della traccia segue che la somma degli autovalori è

$$\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3=-2\qquad\Rightarrow\qquad\gamma_2+\gamma_3=0\,,$$

il secondo e il terzo autovalore sono opposti, l'ulteriore condizione è che, indicando con $\gamma>0$ il modulo comune, cioè $\gamma=|\gamma_2|=|\gamma_3|$, si ha $\gamma\leq 2$. Scegliendo di ordinare gli autovalori secondo l'indice, ovvero $\gamma_1\leq\gamma_2\leq\gamma_3$, abbiamo

$$\gamma_1=-2\,,\qquad\gamma_2=-\gamma\,,\qquad\gamma_3=\gamma\,.$$

Non si può avere degenerazione completa, cioè non possono valere contemporaneamente le due identità $\gamma_1=\gamma_2=\gamma_3$, la seconda può valere sono se e solo se $\gamma_2=\gamma_3=0$. In particolare si ha $\gamma_1<\gamma_3$ come conseguenza dell'ortogonalità degli autovettori noti $|v_1\rangle$ e $|v_3\rangle$, infatti

$$\langle v_1|v_3\rangle=\langle v_3|v_1\rangle=\frac{\langle e_1|e_1\rangle-\langle e_3|e_3\rangle}{2\sqrt{3}}=0\,.$$

Come già detto, essendo l'operatore normale, il secondo autovettore $|v_2\rangle$ è ortogonale al primo e al terzo. Considerando la sua decomposizione rispetto alla base canonica data

$$|v_2\rangle = v_2^j |e_j\rangle\,,$$

dove $v_2^j = \langle e_j | v_2\rangle$, con $j \in \{1,2,3\}$, è la j-esima componente contro-variante del vettore, si hanno le due condizioni

$$\langle v_1|v_2\rangle = \langle v_3|v_2\rangle = 0$$
$$\frac{v_2^1 + 2v_2^2 + v_2^3}{\sqrt{6}} = \frac{v_2^1 - v_2^3}{\sqrt{2}} = 0\,,$$

posto $v_2^1 = v$, si hanno, dalla seconda identità: $v_2^3 = v$, dalla prima, $v_2^2 = -v$, quindi

$$|v_2\rangle = v\,(|e_1\rangle - |e_2\rangle + |e_3\rangle)\,.$$

Scegliamo un valore reale per v e tale che il vettore abbia norma unitaria, quindi

$$|v_2\rangle = \frac{|e_1\rangle - |e_2\rangle + |e_3\rangle}{\sqrt{3}}\,.$$

Indicando con G e G_d le matrici 3×3 che rappresentano l'operatore rispetto alle base canonica e a quella dei sui autovettori, cioè

$$\hat{G} \overset{e}{\hookleftarrow} G\,,\qquad \hat{G} \overset{v}{\hookleftarrow} G_d = \operatorname{diag}(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3) = \operatorname{diag}(-2,-\gamma,\gamma)\,,$$

si ha la relazione di diagonalizzazione

$$G_d = U^\dagger G U\,,$$

dove la matrice U è unitaria e ha come elemento della j esima riga e k-esima colonna, con $k,j \in \{1,2,3\}$, la j-esima componente contro-variante, rispetto alla base canonica $\{|e_m\rangle\}_{m=1}^3$, del k-esimo autovettore, cioè $U_k^j = v_k^j$. Quindi

$$U = \begin{pmatrix} v_1^1 & v_2^1 & v_3^1 \\ v_1^2 & v_2^2 & v_3^2 \\ v_1^3 & v_2^3 & v_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \\ 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

La matrice G si ottiene invertendo la relazione di diagonalizzazione

$$\begin{aligned} G = UG_dU^\dagger &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \\ 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \\ 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2/\sqrt{6} & -4/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \\ -\gamma/\sqrt{3} & \gamma/\sqrt{3} & -\gamma/\sqrt{3} \\ \gamma/\sqrt{2} & 0 & -\gamma/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1/3 - \gamma/6 & -2/3 + \gamma/3 & -1/3 - 5\gamma/6 \\ -1/3 + \gamma/3 & -4/3 - \gamma/3 & -2/3 + \gamma/3 \\ -1/3 - 5\gamma/6 & -2/3 + \gamma/3 & -1/3 + \gamma/6 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

mettendo in evidenza $1/6$ si ha

$$G = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2-\gamma & -4+2\gamma & -2-5\gamma \\ -2+2\gamma & -8-2\gamma & -4+2\gamma \\ -2-5\gamma & -4+2\gamma & -2+\gamma \end{pmatrix}.$$

Quinto problema (punteggio massimo: 5/30)

Si calcoli la trasformata di Fourier della funzione

$$(x) = \frac{x\cos(x)}{(x^2+1)^2}\,.$$

Curiosità. Il simbolo  rappresenta la lettera "m" dell'alfabeto degli uomini danzanti descritto nel primo problema.

Soluzione del quinto problema

Scriviamo la funzione data come prodotto $\Gentsroom(x) = g_1(x)$ con

$$g_1(x) = \frac{x}{(x^2+1)^2}, \qquad g_2(x) = \cos(x),$$

inoltre, la funzione $g_1(x)$ può essere scritta in forma di derivata prima, infatti

$$g_1(x) = -\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\frac{1}{x^2+1}.$$

Usando il teorema della convoluzione e la formula delle derivate

$$\mathscr{F}_k\left[\Gentsroom\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\mathscr{F}_{k'}[g_1] * \mathscr{F}_{k'}[g_2]\right)(k) = -\frac{i}{2\sqrt{2\pi}}\left(\left(k'\mathscr{F}_{k'}\left[\frac{1}{x^2+1}\right]\right) * \mathscr{F}_{k'}[g_2]\right)(k).$$

La trasformata di Fourier della funzione coseno è

$$\mathscr{F}_k[g_2(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\cos(x)e^{-ikx}dx = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{-ix(k-1)} + e^{-ix(k+1)}\right)dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\delta(k-1) + \delta(k+1)\right).$$

La trasformata di Fourier della funzione $1/\left(x^2+1\right)$ è

$$\mathscr{F}_k\left[\frac{1}{x^2+1}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ikx}}{x^2+1}dx = i\sqrt{2\pi}\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{e^{k}}{2i} & k<0 \\ -\dfrac{e^{-k}}{-2i} & k>0 \end{array}\right\} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-|k|}.$$

Segue che

$$\mathscr{F}_k\left[\Gentsroom\right] = -\frac{i}{4}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}(k-k')e^{-|k-k'|}\left(\delta(k'-1) + \delta(k'+1)\right)dk'$$

e infine

$$\mathscr{F}_k\left[\Gentsroom\right] = -\frac{i}{4}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[(k-1)e^{-|k-1|} + (k+1)e^{-|k+1|}\right].$$

Sesto problema (punteggio massimo: 6/30)

Si dimostri che le matrici 2×2

$$A = I - \sigma_1, \qquad B = I - \sigma_2,$$

definite in termini delle prime due matrici di Pauli σ_1 e σ_2, verificano il principio di indeterminazione di Heisenberg con l'identità

$$\Delta A_\psi \Delta B_\psi = \frac{1}{2}\left|\langle[A,B]\rangle_\psi\right|.$$

per ogni vettore 2×1 unitario ψ reale, cioè, per ogni

$$\psi = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

con $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ e $x^2+y^2=1$.

Soluzione del sesto Problema

Consideriamo il quadrato dell'identità data, cioè

$$\left(\Delta A_\psi\right)^2\left(\Delta B_\psi\right)^2 = \frac{1}{4}\left|\langle[A,B]\rangle_\psi\right|^2.$$

Gli scarti quadratici al quadrato sono

$$\left(\Delta A_\psi\right)^2 = \left\langle A^2\right\rangle_\psi - \langle A\rangle_\psi^2\,, \qquad \left(\Delta B_\psi\right)^2 = \left\langle B^2\right\rangle_\psi - \langle B\rangle_\psi^2\,.$$

Calcoliamo i due valori di aspettazione delle matrici al quadrato e i quadrati dei valori di aspettazione, si hanno

$$\begin{aligned}
\left\langle A^2\right\rangle_\psi &= (x \;\; y)(I-\sigma_1)^2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2\,(x \;\; y)(I-\sigma_1)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2(1-2xy)\,,\\
\left\langle B^2\right\rangle_\psi &= (x \;\; y)(I-\sigma_2)^2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2\,(x \;\; y)(I-\sigma_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2\,,\\
\langle A\rangle_\psi^2 &= \left[(x \;\; y)(I-\sigma_1)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right]^2 = (1-2xy)^2\,,\\
\langle B\rangle_\psi^2 &= \left[(x \;\; y)(I-\sigma_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right]^2 = 1\,.
\end{aligned}$$

Usando questi risultati, le espressioni degli scarti quadratici al quadrato sono

$$\left(\Delta A_\psi\right)^2 = 1-4x^2y^2\,, \qquad \left(\Delta B_\psi\right)^2 = 1\,.$$

Il commutatore della matrici A e B può essere ottenuto avvalendosi dell'algebra delle matrici di Pauli e si ha

$$[A,B] = [I-\sigma_1, I-\sigma_2] = [\sigma_1,\sigma_2] = 2i\sigma_3\,,$$

dove σ_3 è la terza matrice di Pauli. Il modulo quadro del valore di aspettazione del commutatore è quindi

$$\left|\langle[A,B]\rangle_\psi\right|^2 = 4\left|\langle\sigma_3\rangle_\psi\right|^2 = 4\left|x^2-y^2\right|^2 = 4\left(x^2-y^2\right)^2.$$

Abbiamo tutti gli elementi per calcolare i membri di sinistra e di destra dell'identità di Heisenberg al quadrato, che sono rispettivamente

$$(\Delta A)_\psi^2\,(\Delta B)_\psi^2 = 1-4x^2y^2\,, \qquad \frac{1}{4}\left|\langle[A,B]\rangle_\psi\right|^2 = \left(x^2-y^2\right)^2.$$

Sono uguali, infatti, usando la condizione di normalizzazione $x^2+y^2=1$, il membro di sinistra può essere riscritto come

$$\begin{aligned}
(\Delta A)_\psi^2\,(\Delta B)_\psi^2 &= 1-4x^2y^2 = (\underbrace{1}_{=x^2+y^2}-2xy)(\underbrace{1}_{=x^2+y^2}+2xy)\\
&= \left(x^2+y^2-2xy\right)\left(x^2+y^2+2xy\right) = (x-y)^2(x+y)^2\,,\\
&= \left(x^2-y^2\right)^2\,,
\end{aligned}$$

quindi

$$(\Delta A)_\psi^2\,(\Delta B)_\psi^2 = \left(x^2-y^2\right)^2 = \frac{1}{4}\left|\langle[A,B]\rangle_\psi\right|^2\,.$$