Metodi Matematici per la Fisica

Prova scritta del 18 giugno 2021

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che il punteggio assegnato a ciascuna procedura di risoluzione può variare tra lo zero e il massimo indicato ed è stabilito valutando:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo.

Primo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si calcoli la somma della serie

$$\Xi = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(12j+4)^4-1}\,.$$

Soluzione del primo problema

Si tratta di una serie con i termini a segno costane della forma

$$\Xi = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f(j)\,,$$

con la funzione $f(z) = 1/\big((12z+4)^4-1\big)$. Il metodo di somma, che si basa sul teorema dei residui, in casi di questo genere, prevede di calcolare il limite della successione di integrali

$$\left\{ \frac{1}{2i\pi} \oint_{|z|=n+1/2} \frac{\pi\cos(\pi z)/\mathrm{sen}(\pi z)}{(12z+4)^4-1} dz \right\}_{n=1}^{\infty}\,.$$

Ciascun integrale può essere calcolato usando il teorema dei residui, ovvero

$$\frac{1}{2i} \oint_{|z|=n+1/2} \frac{\cos(\pi z)/\mathrm{sen}(\pi z)}{(12z+4)^4-1} dz = \sum_{k=1}^{N} \mathrm{Res}\left[\frac{\pi\cos(\pi z)/\mathrm{sen}(\pi z)}{(12z+4)^4-1}, z=z_k\right] + \sum_{j=-n}^{n} \mathrm{Res}\left[\frac{\pi\cos(\pi z)/\mathrm{sen}(\pi z)}{(12z+4)^4-1}, z=j\right],$$

dove l'insieme $\{z_k\}_{k=1}^{N}$ è quello dei poli della funzione $f(z)$ aventi modulo minore di $(n+1/2)$, mentre la funzione $\pi\cos(\pi z)/\mathrm{sen}(\pi z)$ ha poli semplici con residuo unitario in $z=n$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$.
Nel caso in esame, la funzione $f(z)$ ha quattro poli semplici le cui espressioni sono

$$z_k = \frac{e^{ik\pi/2}-4}{12}\,, \qquad k=0,1,2,3\,.$$

Avendo che: $|z_k| = \sqrt{\big(4-\cos(k\pi/2)\big)^2 + \mathrm{sen}^2(k\pi/2)}/12 \leq 5/12 < 1$, $\forall\, k \in \{0,1,2,3\}$, tutti i poli della funzione $f(z)$ sono contenuti nel disco unitario, quindi $\forall\, n \in \mathbb{N}$, si ha

$$\frac{1}{2i} \oint_{|z|=n+1/2} \frac{\cos(\pi z)/\mathrm{sen}(\pi z)}{(12z+4)^4-1} dz = \sum_{k=0}^{3} \mathrm{Res}\left[\frac{\pi\cos(\pi z)/\mathrm{sen}(\pi z)}{(12z+4)^4-1}, z_k\right] + \sum_{j=-n}^{n} \mathrm{Res}\left[\frac{\pi\cos(\pi z)/\mathrm{sen}(\pi z)}{(12z+4)^4-1}, p_j\right].$$

È immediato osservare che, come conseguenza del grado del polinomio a denominatore, il valore limite della funzione integranda moltiplicata per la z sulla circonferenza centrata nell'origine di raggio $(n+1/2)$, al divergere di n, cioè del raggio, sia uniformemente uguale a zero, ovvero

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos(\pi z)/\text{sen}(\pi z)}{(12z+4)^4-1} z \overset{\text{U.}}{=} 0\,,$$

ne consegue che

$$\lim_{n\to\infty} \oint_{|z|=n+1/2} \frac{\cos(\pi z)/\text{sen}(\pi z)}{(12z+4)^4-1} dz = 0\,.$$

Applicando lo stesso limite all'espressione dell'integrarle n-esimo in termini delle somme dei residui avremo

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{k=0}^{3} \text{Res}\left[\frac{\pi\cos(\pi z)/\text{sen}(\pi z)}{(12z+4)^4-1}, z_k\right] + \lim_{n\to\infty}\sum_{j=-n}^{n} \text{Res}\left[\frac{\pi\cos(\pi z)/\text{sen}(\pi z)}{(12z+4)^4-1}, p_j\right] \\
&= \sum_{k=0}^{3} \text{Res}\left[\frac{\pi\cos(\pi z)/\text{sen}(\pi z)}{(12z+4)^4-1}, z_k\right] + \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(12j+4)^4-1}\,.
\end{aligned}$$

La serie a secondo membro rappresenta la serie in esame Ξ, risolvendo l'equazione precedente rispetto ad essa si ha

$$\Xi = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(12j+4)^4-1} = -\sum_{k=0}^{3} \text{Res}\left[\frac{\pi\cos(\pi z)/\text{sen}(\pi z)}{(12z+4)^4-1}, z_k\right].$$

I residui nei poli semplici della funzione $f(z)$ sono

$$\text{Res}\left[\frac{\pi\cos(\pi z)/\text{sen}(\pi z)}{(12z+4)^4-1}, z_k\right] = \frac{\pi}{48}\frac{\cos(\pi z_k)}{\text{sen}(\pi z_k)} e^{-3ik\pi/2}\,, \qquad k=0,1,2,3\,,$$

per il calcolo si è sfruttata l'identità: $12z_k+4 = e^{ik\pi/2}$, con $k=0,1,2,3$. Considerando i valori espliciti dei poli

$$z_0 = -\frac{1}{4}\,, \qquad z_1 = -\frac{1}{3} + i\frac{1}{12}\,, \qquad z_2 = -\frac{5}{12}\,, \qquad z_3 = -\frac{1}{3} - i\frac{1}{12} = z_1^*\,,$$

possiamo calcolare le funzioni coseno come

$$\begin{aligned}
&\cos(\pi z_0) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,,\\
&\cos(\pi z_1) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{i\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cosh\left(\frac{\pi}{12}\right) - i\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\text{senh}\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2}\cosh\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\frac{\sqrt{3}}{2}\text{senh}\left(\frac{\pi}{12}\right)\,,\\
&\cos(\pi z_2) = \cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\,,\\
&\cos(\pi z_3) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}-\frac{i\pi}{12}\right) = \frac{1}{2}\cosh\left(\frac{\pi}{12}\right) - i\frac{\sqrt{3}}{2}\text{senh}\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos(\pi z_1)^*\,,
\end{aligned}$$

mentre per le funzioni seno si hanno le espressioni

$$\begin{aligned}
&\text{sen}(\pi z_0) = \text{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\,,\\
&\text{sen}(\pi z_1) = \text{sen}\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{i\pi}{12}\right) = \text{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\cosh\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\,\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\text{senh}\left(\frac{\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\cosh\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\frac{1}{2}\text{senh}\left(\frac{\pi}{12}\right)\,,\\
&\text{sen}(\pi z_2) = \text{sen}\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\,,\\
&\text{sen}(\pi z_3) = \text{sen}\left(-\frac{\pi}{3}-\frac{i\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\cosh\left(\frac{\pi}{12}\right) - i\frac{1}{2}\text{senh}\left(\frac{\pi}{12}\right) = \text{sen}(\pi z_1)^*\,,
\end{aligned}$$

infine, dalle precedenti espressioni, otteniamo i residui

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Res}[z_0] &= \frac{\pi}{48}\frac{\cos(\pi z_0)}{\operatorname{sen}(\pi z_0)} = -\frac{\pi}{48}\,,\\
\operatorname{Res}[z_1] &= \frac{\pi}{48}\frac{\cos(\pi z_1)}{\operatorname{sen}(\pi z_1)}e^{-3i\pi/2} = \frac{\pi}{48}\frac{\left(i-\sqrt{3}\tanh\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)\left(-\sqrt{3}-i\tanh\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)}{3+\tanh^2\left(\frac{\pi}{12}\right)} = \frac{\pi}{48}\frac{4\tanh\left(\frac{\pi}{12}\right)-i\sqrt{3}\left(1+\tanh^2\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)}{3+\tanh^2\left(\frac{\pi}{12}\right)}\,,\\
\operatorname{Res}[z_2] &= \frac{\pi}{48}\frac{\cos(\pi z_2)}{\operatorname{sen}(\pi z_2)}e^{-3i\pi} = \frac{\pi}{48}\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{\pi}{48}\left(2-\sqrt{3}\right),\\
\operatorname{Res}[z_3] &= \frac{\pi}{48}\frac{\cos(\pi z_3)}{\operatorname{sen}(\pi z_3)}e^{-9i\pi/2} = \operatorname{Res}[z_1]^* = \frac{\pi}{48}\frac{4\tanh\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sqrt{3}\left(1+\tanh^2\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)}{3+\tanh^2\left(\frac{\pi}{12}\right)}\,.
\end{aligned}
$$

Il risultato finale si ottiene sommando i quattro residui

$$
\Xi = \sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(12j+4)^4-1} = -\sum_{k=0}^{3}\operatorname{Res}[z_k] = -\frac{\pi}{48}\left[1-\sqrt{3}+\frac{8\tanh(\pi/12)}{3+\tanh^2(\pi/12)}\right].
$$

Secondo problema (punteggio massimo: 5/30)

Si verifichi la validità dello sviluppo di Mittag-Leffler

$$
\frac{1}{\cos(z\pi/3)+1} = \frac{36}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^2+9(2k+1)^2}{\left[z^2-9(2k+1)^2\right]^2}\,.
$$

Soluzione del secondo problema

La funzione ha poli nei punti della successione $\{z_k = 3(2k+1)\}_{k\in\mathbb{Z}}$, sono i punti che verificano l'equazione di annullamento del denominatore

$$
\cos\left(\frac{z_k\pi}{3}\right) = -1 \qquad \forall\, k\in\mathbb{Z}\,.
$$

In quanto corrispondenti a punti di massimo della funzione coseno, sono poli doppi, ovvero in essi si annulla sia il denominatore della funzione che la sua derivata prima, mentre la derivata seconda è diversa da zero e finita, cioè

$$
\begin{aligned}
&\cos\left(\frac{z_k\pi}{3}\right)+1 = 0\,,\\
&\frac{d}{dz}\left(\cos\left(\frac{z\pi}{3}\right)+1\right)\Bigg|_{z=z_k} = -\frac{\pi}{3}\operatorname{sen}\left(\frac{z_k\pi}{3}\right) = 0\,,\\
&\frac{d^2}{dz^2}\left(\cos\left(\frac{z\pi}{3}\right)+1\right)\Bigg|_{z=z_k} = -\frac{\pi^2}{9}\cos\left(\frac{z_k\pi}{3}\right) = \frac{\pi^2}{9}\,, \qquad \forall\, k\in\mathbb{Z}\,.
\end{aligned}
$$

Per ottenere la parte principale della serie di Laurent della funzione $1/(\cos(z\pi/3)+1)$ centrata nel generico polo doppio z_k, con $k\in\mathbb{Z}$, consideriamo lo sviluppo in serie di Taylor della funzione coseno centrata nello stesso $z=z_k$,

$$
\begin{aligned}
\cos\left(\frac{z\pi}{3}\right) &= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\frac{d^j}{dz^j}\cos\left(\frac{z\pi}{3}\right)\Bigg|_{z=z_k}(z-z_k)^j = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(2j)!}\frac{d^{2j}}{dz^{2j}}\cos\left(\frac{z\pi}{3}\right)\Bigg|_{z=z_k}(z-z_k)^{2j}\\
&= \cos\left(\frac{z_k\pi}{3}\right)+\frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\cos\left(\frac{z\pi}{3}\right)\Bigg|_{z=z_k}(z-z_k)^2+\mathcal{O}\left((z-z_k)^4\right) = -1+\frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{3}\right)^2(z-z_k)^2+\mathcal{O}\left((z-z_k)^4\right)\\
&= \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^{j+1}\frac{1}{(2j)!}\left(\frac{\pi}{3}\right)^{2j}(z-z_k)^{2j}\,,
\end{aligned}
$$

dove si è tenuto conto dell'annullamento della funzione seno, quindi delle derivate di ordine dispari nel centro dello sviluppo. La serie di Taylor converge ovunque in $\mathbb{C}$ e lo fa in modo uniforme in ogni insieme chiuso.

Usando tale sviluppo in serie e la formula della somma della serie geometrica, la funzione di partenza può essere scritta come

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\cos(z\pi/3)+1} &= \frac{1}{\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j+1}\frac{1}{(2j)!}\left(\frac{\pi}{3}\right)^{2j}(z-z_k)^{2j}} = \frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}\right)^{2}(z-z_k)^2\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j+1}\frac{2}{(2j)!}\left(\frac{\pi}{3}\right)^{2j-2}(z-z_k)^{2j-2}} \\
&= \frac{18}{\pi^2}\frac{1}{(z-z_k)^2}\frac{1}{1-\frac{2}{4!}\left(\frac{\pi}{3}\right)^2(z-z_k)^2+\frac{2}{6!}\left(\frac{\pi}{3}\right)^4(z-z_k)^4+\mathcal{O}\left((z-z_k)^6\right)} \\
&= \frac{18}{\pi^2}\frac{1}{(z-z_k)^2}\left[1+\left(\frac{2}{4!}\left(\frac{\pi}{3}\right)^2(z-z_k)^2-\frac{2}{6!}\left(\frac{\pi}{3}\right)^4(z-z_k)^4+\mathcal{O}\left((z-z_k)^6\right)\right)\right. \\
&\quad \left.+\left(\frac{2}{4!}\left(\frac{\pi}{3}\right)^2(z-z_k)^2-\frac{2}{6!}\left(\frac{\pi}{3}\right)^4(z-z_k)^4+\mathcal{O}\left((z-z_k)^6\right)\right)^2+\cdots\right],
\end{aligned}
$$

questa identità vale $\forall\, z$, tale che: $|z-z_k| < |z_k - z_{k\pm1}| = 6$. Ovvero, è solo per questi valori di z che la serie geometrica converge ed è quindi lecito scrivere l'inverso della serie di potenze in termini della stessa serie geometrica. Dall'espressione precedente si evince che la parte principale della serie di Laurent ha il solo termine con potenza -2, si ha cioè

$$
\frac{1}{\cos(z\pi/3)+1} = \frac{18}{\pi^2}\frac{1}{(z-z_k)^2}+\mathcal{O}(1)\,.
$$

Alla luce dei risultati fin qui ottenuti, lo sviluppo di Mittag-Leffler è

$$
\frac{1}{\cos(z\pi/3)+1} = \phi(z)+\frac{18}{\pi^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-z_k)^2} = \phi(z)+\frac{18}{\pi^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-3(2k+1))^2}\,,
$$

dove la funzione $\phi(z)$ rappresenta la parte intera. Poiché la funzione iniziale è regolare all'infinito, ovvero non ha singolarità all'infinito, si ha che la funzione $\phi(z)$ è costante, la poniamo uguale a ϕ_0. Possiamo ottenere ϕ_0 calcolando la funzione in punto in cui il suo valore sia noto, ad esempio in $z=0$ avremo

$$
\frac{1}{2} = \phi_0+\frac{18}{\pi^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{9(2k+1)^2}\,,
$$

da cui

$$
\phi_0 = \frac{1}{2}-\frac{2}{\pi^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\,.
$$

La somma della serie degli inversi dei quadrati dei numeri dispari è nota, si può comunque calcolare con il metodo dei residui e si ha

$$
\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = -\mathrm{Res}\left[\frac{1}{(2z+1)^2}\frac{\pi\cos(z\pi)}{\mathrm{sen}(z\pi)}, z=-\frac{1}{2}\right] = -\frac{\pi}{4}\frac{d}{dz}\frac{\cos(z\pi)}{\mathrm{sen}(z\pi)}\bigg|_{z=-1/2} = -\frac{\pi}{4}\frac{-\pi}{\mathrm{sen}^2(-\pi/2)} = \frac{\pi^2}{4}\,,
$$

ne consegue che ϕ_0 è nullo, infatti

$$
\phi_0 = \frac{1}{2}-\frac{2}{\pi^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{2}-\frac{2}{\pi^2}\frac{\pi^2}{4} = 0\,.
$$

Infine, per arrivare alla forma proposta, manipoliamo la serie come segue

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\cos(z\pi/3)+1} &= \frac{18}{\pi^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-3(2k+1))^2} = \frac{18}{\pi^2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(z-3(2k+1))^2}+\sum_{l=-\infty}^{-1}\frac{1}{(z-3(2l+1))^2}\right) \\
&= \left\{k'=-l-1, l=-k'-1\right\} = \frac{18}{\pi^2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(z-3(2k+1))^2}+\sum_{k'=0}^{\infty}\frac{1}{(z+3(2k'+1))^2}\right) \\
&= \frac{18}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2\left(z^2+9(2k+1)^2\right)}{\left(z^2-9(2k+1)^2\right)^2}\,,
\end{aligned}
$$

da cui l'identità cercata

$$\frac{1}{\cos(z\pi/3)+1}=\frac{36}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^2+9(2k+1)^2}{(z^2-9(2k+1)^2)^2}\,.$$

Terzo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$\aleph=\int_S\frac{dz}{(e^{iz}+1)z^2}$$

dove il percorso d'integrazione S è il seguente insieme

$$S=\left\{z:z=x+i\cos(x/4),\forall\,x\in\mathbb{R}\right\}.$$

Soluzione del terzo problema

La funzione integranda ha un polo doppio nell'origine e poli semplici nei punti dell'insieme $\{z_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, tali che

$$e^{iz_k}+1=0\qquad\Rightarrow\qquad e^{iz_k}=e^{(2k+1)i\pi}\qquad\Rightarrow\qquad z_k=(2k+1)\pi\,,\qquad\forall\,k\in\mathbb{Z}\,.$$

Sono poli semplici, infatti

$$\lim_{z\to z_k}\frac{z-z_k}{(e^{iz}+1)z^2}=\lim_{z\to z_k}\frac{1}{ie^{iz}z^2}=\frac{1}{ie^{iz_k}z_k^2}=\frac{i}{(2k+1)^2\pi^2}\neq 0\,,\qquad\forall\,k\in\mathbb{Z}\,.$$

Consideriamo il percorso chiuso S_R mostrato in figura dato dall'unione della porzione di S costituita dai punti con parte reale compresa nell'intervallo $[-R,R]$ con l'arco di raggio R, centrato nell'origine, passante per il punto $z=iR$ e avente come estremi i punti di S: $s_\pm=\pm R+i\cos(R/4)\in S$. Come di evince dalla figura, il percorso S_R avvolge una sola volta i poli dell'insieme

$$\left\{z_k^+=(3+8k)\pi,z_k^-=(-3+8k)\pi\right\}_{k\in\mathbb{Z}}\,.$$

Tali poli sono indicati in figura con il simbolo "×", mentre con lo stesso simbolo ma di colore nero sono evidenziati i poli non avvolti dal percorso chiuso S_R. Sull'asse reale della figura, le linee verticali indicano i multipli interi positivi e negativi di π, non le unità.
Si ha

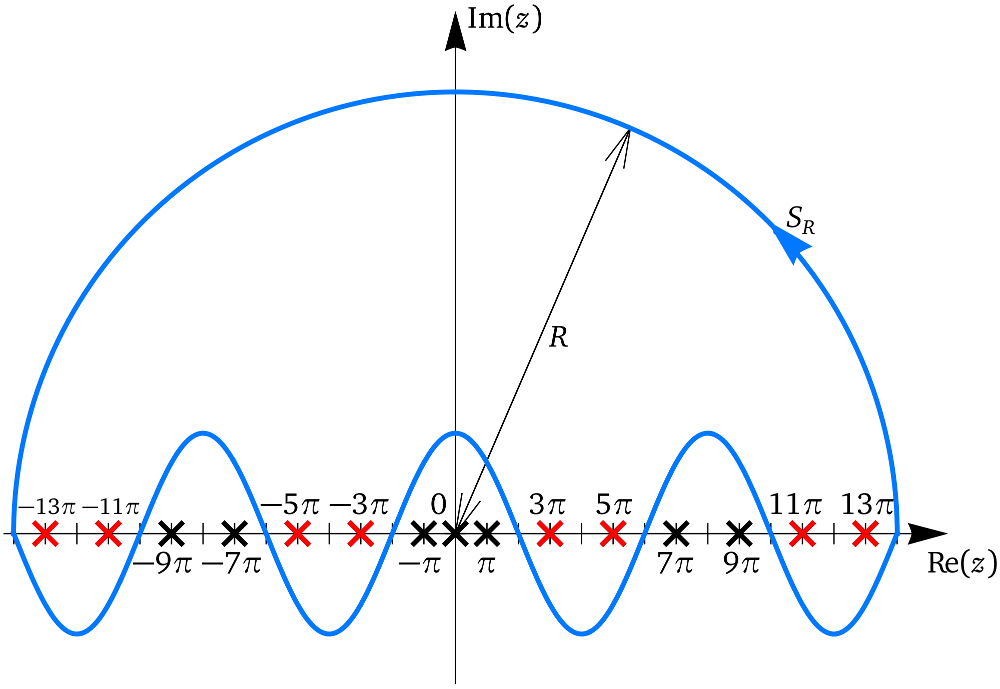
$$\begin{aligned}\aleph&=\lim_{R\to\infty}\oint_{S_R}\frac{dz}{(e^{iz}+1)z^2}=2i\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\mathrm{Res}\left[\frac{1}{(e^{iz}+1)z^2},z=(-3+8k)\pi\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{1}{(e^{iz}+1)z^2},z=(3+8k)\pi\right]\right)\\&=2i\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{i}{(3-8k)^2\pi^2}+\frac{i}{(3+8k)^2\pi^2}\right)=-\frac{2}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{(-3+8k)^2}+\frac{1}{(3+8k)^2}\right).\end{aligned}$$

Le due serie sono della forma

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}f_\pm(k)\,,$$

con $f_\pm(z)=1/(8z\pm 3)^2$, per ottenerne la somma usiamo il metodo basato sul teorema dei residui, ovvero si ha

$$\begin{aligned}0&=\frac{1}{2i\pi}\lim_{n\to\infty}\oint_{|z|=n+1/2}f_\pm(z)\frac{\pi\cos(z\pi)}{\mathrm{sen}(z\pi)}dz\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{|z_j|<n+1/2}\mathrm{Res}\left[f_\pm(z)\frac{\pi\cos(z\pi)}{\mathrm{sen}(z\pi)},z=z_j\right]+\sum_{k=-n}^{n}\mathrm{Res}\left[f_\pm(z)\frac{\pi\cos(z\pi)}{\mathrm{sen}(z\pi)},z=k\right]\right)\\&=\sum_{j=1}^{N}\mathrm{Res}\left[f_\pm(z)\frac{\pi\cos(z\pi)}{\mathrm{sen}(z\pi)},z=z_j\right]+\sum_{k=-\infty}^{\infty}f_\pm(k)\,,\end{aligned}$$



dove l'insieme $\{z_j\}_{j=1}^N$ contiene gli zeri della funzione $f_\pm(z)$, che assumiamo avere intersezione vuota con l'insieme dei numeri relativi $\mathbb{Z}$. Inoltre osserviamo come, grazie al comportamento regolare all'infinito della funzione $f_\pm(z)$, sulla circonferenza centrata nell'origine e di raggio $(n+1/2)$ si abbia il limite uniforme

$$\lim_{n\to\infty} f_\pm(z)\frac{\pi\cos(z\pi)}{\operatorname{sen}(z\pi)}z \overset{\text{U.}}{=} 0\,,$$

cosicché il limite dell'integrale sia nullo. Della penultima identità segue

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_\pm(k) = -\sum_{j=1}^{N}\operatorname{Res}\left[f_\pm(z)\frac{\pi\cos(z\pi)}{\operatorname{sen}(z\pi)}, z=z_j\right].$$

Nei casi in esame la funzione $f_\pm(z)$ ha un solo polo doppio nel punto $z=\mp 3/8$, ne consegue che

$$\begin{aligned}\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_\pm(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(8k\pm3)^2} &= -\sum_{j=1}^{N}\operatorname{Res}\left[\frac{1}{(8z\pm3)^2}\frac{\pi\cos(z\pi)}{\operatorname{sen}(z\pi)}, z=z_j\right] = -\frac{\pi}{64}\frac{d}{dz}\frac{\cos(z\pi)}{\operatorname{sen}(z\pi)}\bigg|_{z=\mp3/8}\\ &= \frac{\pi^2}{64}\frac{1}{\operatorname{sen}^2(z\pi)}\bigg|_{z=\mp3/8} = \frac{\pi^2}{64\operatorname{sen}^2(3\pi/8)}.\end{aligned}$$

Usando la formula di duplicazione $\cos(2\theta)=1-2\operatorname{sen}^2(\theta)$, da cui: $2\operatorname{sen}^2(\theta)=1-\cos(2\theta)$, possiamo calcolare l'espressione a denominatore come

$$64\operatorname{sen}^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) = 32\left(1-\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = 32\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 16\left(2+\sqrt{2}\right).$$

Le due serie, con le funzioni $f_+(z)$ e $f_-(z)$, hanno la stessa somma

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(8k\pm3)^2} = \frac{\pi^2}{16\left(2+\sqrt{2}\right)},$$

quindi l'integrale cercato vale

$$\aleph = -\frac{2}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{(8k-3)^2}+\frac{1}{(8k+3)^2}\right) = -\frac{\pi}{4\left(2+\sqrt{2}\right)}.$$

Quarto problema (punteggio massimo: 6/30)

Si determinino le matrici A che rappresentano gli operatori $\hat{A}$ definiti nello spazio di Hilbert a tre dimensioni E_3, rispetto alla base canonica (ortonormale) $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^{3} \subset E_3$, conoscendo le azioni

$$\hat{T}(\hat{A})|e_1\rangle = |e_1\rangle - |e_3\rangle\,, \qquad \hat{T}(\hat{A})|e_2\rangle = 2|e_2\rangle\,, \qquad \hat{T}(\hat{A})|e_3\rangle = |e_1\rangle + |e_3\rangle\,,$$

con $T(x) = 2x - x^2$.

Soluzione del quarto problema

Innanzitutto consideriamo la matrice T che rappresenta l'operatore $\hat{T}(\hat{A}) = 2\hat{A} - \hat{A}^2$ rispetto alla base canonica, i cui elementi si ottengono come

$$T^k_j = \langle e_k|\hat{p}(\hat{A})|e_j\rangle\,, \qquad \forall\, k, j \in \{1,2,3\}\,,$$

ne consegue che, in virtù della azioni date dal problema, la stessa matrice ha la forma

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori dell'operatore $\hat{T}$ si ottengono come soluzione dell'equazione secolare

$$\det(T - \tau I) = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1-\tau & 0 & 1 \\ 0 & 2-\tau & 0 \\ -1 & 0 & 1-\tau \end{pmatrix} = 0$$

$$(2-\tau)\left[(1-\tau)^2 + 1\right] = 0$$

che sono

$$\tau_0 = 2\,, \qquad \tau_\pm = 1 \pm i\,.$$

Le componenti contro-varianti dei vettori 3×1 che rappresentano gli autovettori sono le soluzioni dei tre sistemi omogenei

$$\begin{pmatrix} 1-\tau_k & 0 & 1 \\ 0 & 2-\tau_k & 0 \\ -1 & 0 & 1-\tau_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1_{(k)} \\ v^2_{(k)} \\ v^3_{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad k = 0, +, -.$$

Nel caso $k = 0$, ovvero con l'autovalore $\tau_0 = 2$, si ha

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1_{(0)} \\ v^2_{(0)} \\ v^3_{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

sommando la prima e terza equazione si ottiene che la prima e la terza componente sono nulle, cioè $v^2_{(0)} = v^1_{(0)} = 0$, l'unica componente non nulla è quindi la seconda, cosicché

$$v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Per ciò che concerne le rappresentazioni degli altri due autovettori, quelli relativi agli autovalori $\tau_\pm = 1 \pm i$, si hanno i sistemi

$$\begin{pmatrix} \mp i & 0 & 1 \\ 0 & 1 \mp i & 0 \\ -1 & 0 & \mp i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1_{(\pm)} \\ v^2_{(\pm)} \\ v^3_{(\pm)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

poniamo $v^1_{(\pm)} = x \in (0,\infty)$, dalla prima equazione si ha: $v^3_{(\pm)} = \pm i v^1_{(\pm)} = \pm i x$, mentre dalla seconda: $v^2_{(\pm)} = 0$, quindi

$$v_\pm = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \pm i \end{pmatrix}$$

I tre autovettori normalizzati all'unità, normalizzazione che si ottiene ponendo ad esempio $x = 1/\sqrt{2}$, sono

$$v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \pm i \end{pmatrix}.$$

Formano un insieme ortonormale, quindi la matrice diagonalizzante U è unitaria e ha la forma esplicita

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & i/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

La diagonalizzazione si effettua con la trasformazione

$$U^\dagger T U = T_d = \mathrm{diag}(\tau_0, \tau_+, \tau_-).$$

L'operatore $\hat{T}$ è quindi diagonalizzabile, gli operatori $\hat{A}$ che verificano la relazione di secondo grado data sono due, li indichiamo con $\hat{A}^\pm$, essi commutano tra loro e con l'operatore $\hat{T}$ e sono quindi tutti e tre diagonalizzabili simultaneamente. Ovvero, i tre operatori $\hat{T}$, $\hat{A}^+$ e $\hat{A}^-$ hanno lo stesso insieme di autovettori, le cui rappresentazioni rispetto alla base canonica sono gli elementi dell'insieme $\{v_k\}_{k=0,\pm}$. Usiamo il teorema spettrale per ottenere gli autovalori degli operatori $\hat{A}^+$ e $\hat{A}^-$, indicando rispettivamente con $\left\{\alpha^+_k\right\}_{k=0,\pm}$ e $\left\{\alpha^-_k\right\}_{k=0,\pm}$ gli spettri discreti, si ha

$$T(\alpha^\pm_k) = \tau_k \quad \Rightarrow \quad \left(\alpha^\pm_k\right)^2 - 2\alpha^\pm_k + \tau_k = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha^\pm_k = 1 \pm \sqrt{1-\tau_k} = \begin{cases} 1 \pm \sqrt{-1} = 1 \pm i & k = 0 \\ 1 \pm \sqrt{-i} = 1 \pm e^{-i\pi/4} & k = + \\ 1 \pm \sqrt{i} = 1 \pm e^{i\pi/4} & k = - \end{cases}.$$

Le matrici diagonali che rappresentano gli operatori $\hat{A}^\pm$ rispetto alla base degli autovettori sono

$$A^\pm_d = \begin{pmatrix} 1 \pm i & 0 & 0 \\ 0 & 1 \pm e^{-i\pi/4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \pm e^{i\pi/4} \end{pmatrix}.$$

Da queste si ottengono le rappresentazioni rispetto alla base canonica come

$$\begin{aligned}
A^\pm &= U A^\pm_d U^\dagger \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & i/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \pm i & 0 & 0 \\ 0 & 1 \pm e^{-i\pi/4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \pm e^{i\pi/4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & i/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & (1 \pm e^{-i\pi/4})/\sqrt{2} & (1 \pm e^{i\pi/4})/\sqrt{2} \\ 1 \pm i & 0 & 0 \\ 0 & i(1 \pm e^{-i\pi/4})/\sqrt{2} & -i(1 \pm e^{i\pi/4})/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & i/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \pm \left(e^{-i\pi/4} + e^{i\pi/4}\right)/2 & 0 & \pm i \left(-e^{-i\pi/4} + e^{i\pi/4}\right)/2 \\ 0 & 1 \pm i & 0 \\ \pm i \left(e^{-i\pi/4} - e^{i\pi/4}\right)/2 & 0 & 1 \pm \left(e^{-i\pi/4} + e^{i\pi/4}\right)/2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \pm \cos(\pi/4) & 0 & \mp \mathrm{sen}(\pi/4) \\ 0 & 1 \pm i & 0 \\ \pm \mathrm{sen}(\pi/4) & 0 & 1 \pm \cos(\pi/4) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \pm 1/\sqrt{2} & 0 & \mp 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 \pm i & 0 \\ \pm 1/\sqrt{2} & 0 & 1 \pm 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Quinto problema (punteggio massimo: 5/30)

Dato l'operatore hermitiano $\hat{H}$, si dimostri che $\hat{G}_{\pm\epsilon} = \hat{H} \pm i\epsilon\hat{I}$, con $\epsilon > 0$, sono due operatori regolari, ovvero invertibili. Imponendo le opportune condizione sul parametro reale positivo ϵ, si ottengano gli sviluppi in serie di potenze dell'operatore $\hat{H}$ che rappresentano gli operatori $\hat{G}^{-1}_{\pm\epsilon}$, ovvero gli insiemi dei coefficienti $\left\{g_k^{\pm}\right\}_{k=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ delle due serie

$$\hat{G}^{-1}_{\pm\epsilon} = \sum_{k=0}^{\infty} g_k^{\pm}\hat{H}^k .$$

Infine si verifichi che l'operatore $\hat{G}^{-1}_{+\epsilon}\hat{G}_{-\epsilon}$ è unitario.

Soluzione del quinto problema

Usiamo l'equivalenza tra la condizione di invertibilità di un operatore e quella di avere determinante non nullo. L'operatore $\hat{H}$ è hermitiano e quindi è diagonalizzabile e ha spettro discreto reale. Il suo determinate è il prodotto degli autovalori, indicando con $\sigma(\hat{A}) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\} \subset \mathbb{R}$ lo spettro discreto, si ha

$$\det(\hat{A}) = \prod_k \lambda_k .$$

Gli operatori $\hat{G}_{\pm\epsilon}$ sono normali, infatti si ha il commutatore

$$\begin{aligned}\left[\hat{G}_{\pm\epsilon}, \hat{G}^{\dagger}_{\pm\epsilon}\right] &= \left(\hat{H} \pm i\epsilon\hat{I}\right)\left(\hat{H} \pm i\epsilon\hat{I}\right)^{\dagger} - \left(\hat{H} \pm i\epsilon\hat{I}\right)^{\dagger}\left(\hat{H} \pm i\epsilon\hat{I}\right) = \left(\hat{H} \pm i\epsilon\hat{I}\right)\left(\hat{H} \mp i\epsilon\hat{I}\right) - \left(\hat{H} \mp i\epsilon\hat{I}\right)\left(\hat{H} \pm i\epsilon\hat{I}\right) \\ &= \hat{H}^2 + \epsilon^2\hat{I} \pm i\epsilon\hat{H} \mp \hat{H}i\epsilon - \left(\hat{H}^2 + \epsilon^2\hat{I} \mp i\epsilon\hat{H} \pm \hat{H}i\epsilon\right) = \hat{H}^2 + \epsilon^2\hat{I} - \left(\hat{H}^2 + \epsilon^2\hat{I}\right) = 0 ,\end{aligned}$$

dove lo zero finale indica l'operatore nullo. Non solo, gli operatori $\hat{H}$, $\hat{G}_{+\epsilon}$ e $\hat{G}_{-\epsilon}$ sono mutuamente commutanti e quindi sono diagonalizzabili simultaneamente, hanno lo stesso insieme di autovettori, mentre gli spettri discreti hanno relazioni algebriche che derivano dalle definizioni degli operatori $\hat{G}_{\pm\epsilon}$ in termini dell'operatore $\hat{H}$. In particolare, indicando con $\sigma\left(\hat{G}_{\pm\epsilon}\right) = \left\{\gamma_1^{\pm}, \gamma_2^{\pm}, \ldots\right\} \subset \mathbb{C}$ gli spettri discreti, si hanno

$$\sigma\left(\hat{G}_{\pm\epsilon}\right) = \left\{\gamma_k^{\pm} = \lambda_k \pm i\epsilon\right\}_k .$$

Poiché gli autovalori λ_k sono reali, gli autovalori corrispondenti $\gamma_k^{\pm}$ sono tutti strettamente diversi da zero, infatti

$$|\gamma_k^{\pm}| \geq |\mathrm{Im}(\gamma_k^{\pm})| = \epsilon > 0 , \qquad \forall\, k .$$

Ne consegue che i determinanti degli operatori $\hat{G}_{\pm\epsilon}$ sono tali che

$$\left|\det\left(\hat{G}_{\pm\epsilon}\right)\right| = \left|\prod_k \gamma_k^{\pm}\right| = \prod_k \left|\gamma_k^{\pm}\right| \geq \prod_k \epsilon > 0 ,$$

ovvero sono strettamente diversi da zero, quindi gli operatori sono invertibili.
Gli inversi degli operatori sono

$$\hat{G}^{-1}_{\pm\epsilon} = \left(\hat{H} \pm i\epsilon\hat{I}\right)^{-1}$$

gli autovalori, in conseguenza del teorema spettrale, sono gli inversi degli autovalori degli operatori originari e la sono legati a quelli dell'operatore $\hat{H}$ dalla stessa relazione algebrica, cioè

$$\left(\gamma_k^{\pm}\right)^{-1} = (\lambda_k \pm i\epsilon)^{-1} = \frac{1}{\lambda_k \pm i\epsilon} = \frac{\pm 1/(i\epsilon)}{1 \pm \lambda_k/(i\epsilon)} , \qquad \forall\, k .$$

L'ultima espressione può essere interpretata come somma della serie geometrica di ragione $\mp\lambda_k/(i\epsilon)$, qualora, ovviamente, sia verificata la condizione di convergenza

$$\left|\frac{\lambda_k}{i\epsilon}\right| < 1 \quad \Rightarrow \quad \epsilon > |\lambda_k| , \qquad \forall\, k \quad \Leftrightarrow \quad \epsilon > \max_k\{|\lambda_k|\} ,$$

ovvero se il parametro ϵ è strettamente maggiore del modulo di tutti gli autovalori dell'operatore hermitiano $\hat{H}$ o, equivalentemente, se è strettamente maggiore del maggiore di essi. In termini della serie geometrica avremo

$$\left(\gamma_k^{\pm}\right)^{-1} = \pm\frac{1}{i\epsilon}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\mp\frac{\lambda_k}{i\epsilon}\right)^j ,$$

da cui segue la validità della stessa relazione algebrica per gli operatori, cioè

$$\hat{G}_{\pm\epsilon}^{-1} = \pm\frac{1}{i\epsilon}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\mp\frac{1}{i\epsilon}\right)^j \hat{H}^j = -\sum_{j=0}^{\infty}\left(\mp\frac{1}{i\epsilon}\right)^{j+1}\hat{H}^j = -\sum_{j=0}^{\infty}\left(\pm\frac{i}{\epsilon}\right)^{j+1}\hat{H}^j .$$

Si tratta degli sviluppi in serie richiesti, gli insiemi dei coefficienti sono

$$\left\{ g_j^{\pm} = -\left(\pm\frac{i}{\epsilon}\right)^{j+1}\right\}_{j=0}^{\infty} .$$

La condizione di convergenza, ricordando che per un operatore normale la norma coincide con il massimo modulo dei sui autovalori, è

$$\epsilon > \max_k \{|\lambda_k|\} = \left\|\hat{H}\right\| .$$

Da quanto ottenuto si ha che l'operatore aggiunto dell'inverso $\hat{G}_{\pm\epsilon}^{-1}$ è

$$\left(\hat{G}_{\pm\epsilon}^{-1}\right)^{\dagger} = \left[-\sum_{j=0}^{\infty}\left(\pm\frac{1}{i\epsilon}\right)^{j+1}\hat{H}^j\right]^{\dagger} = -\sum_{j=0}^{\infty}\left(\mp\frac{1}{i\epsilon}\right)^{j+1}\hat{H}^j = \hat{G}_{\mp\epsilon}^{-1} ,$$

cioè l'inverso dell'operatore con il parametro ϵ cambiato di segno. Mentre, direttamente dalla definizione, si ha l'ovvia rtelazione

$$\left(\hat{G}_{\pm\epsilon}\right)^{\dagger} = \hat{G}_{\mp\epsilon} .$$

Inoltre, in quanto gli operatori $\hat{G}_{\pm\epsilon}$ e i loro inversi $\hat{G}_{\pm\epsilon}^{-1}$ sono esprimibili come funzioni del solo operatore hermitiano $\hat{H}$, questi sono tutti operatori mutuamente commutanti, cioè

$$\left[\hat{G}_{+\epsilon,-\epsilon}, \hat{G}_{+\epsilon,-\epsilon}\right] = \left[\hat{G}_{+\epsilon,-\epsilon}^{-1}, \hat{G}_{+\epsilon,-\epsilon}\right] = \left[\hat{G}_{+\epsilon,-\epsilon}^{-1}, \hat{G}_{+\epsilon,-\epsilon}^{-1}\right] = 0 ,$$

per tutte le combinazioni di segni del parametro ϵ.
Alla luce di queste considerazioni, per dimostrare che l'operatore $\hat{G}_{+\epsilon}^{-1}\hat{G}_{-\epsilon}$ sia unitario ne calcoliamo i prodotti con il suo aggiunto

$$\left(\hat{G}_{+\epsilon}^{-1}\hat{G}_{-\epsilon}\right)^{\dagger}\hat{G}_{+\epsilon}^{-1}\hat{G}_{-\epsilon} = \left(\hat{G}_{-\epsilon}\right)^{\dagger}\left(\hat{G}_{+\epsilon}^{-1}\right)^{\dagger}\hat{G}_{+\epsilon}^{-1}\hat{G}_{-\epsilon} = \hat{G}_{+\epsilon}\hat{G}_{-\epsilon}^{-1}\hat{G}_{+\epsilon}^{-1}\hat{G}_{-\epsilon} = \underbrace{\hat{G}_{+\epsilon}\hat{G}_{+\epsilon}^{-1}}_{=\hat{I}}\underbrace{\hat{G}_{-\epsilon}^{-1}\hat{G}_{-\epsilon}}_{=\hat{I}} = \hat{I} ,$$

$$\hat{G}_{+\epsilon}^{-1}\hat{G}_{-\epsilon}\left(\hat{G}_{+\epsilon}^{-1}\hat{G}_{-\epsilon}\right)^{\dagger} = \hat{G}_{+\epsilon}^{-1}\hat{G}_{-\epsilon}\left(\hat{G}_{-\epsilon}\right)^{\dagger}\left(\hat{G}_{+\epsilon}^{-1}\right)^{\dagger} = \hat{G}_{+\epsilon}^{-1}\hat{G}_{-\epsilon}\hat{G}_{+\epsilon}\hat{G}_{-\epsilon}^{-1} = \underbrace{\hat{G}_{+\epsilon}^{-1}\hat{G}_{+\epsilon}}_{=\hat{I}}\underbrace{\hat{G}_{-\epsilon}\hat{G}_{-\epsilon}^{-1}}_{=\hat{I}} = \hat{I} ,$$

ciò dimostra che l'operatore $\hat{G}_{+\epsilon}^{-1}\hat{G}_{-\epsilon}$ è unitario.

Sesto problema (punteggio massimo: 5/30)

Si calcoli la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = \left|1 - |x|^3\right|\,\theta\left(1 - x^2\right) .$$

Soluzione del sesto Problema

Dalla definizione di trasformata di Fourier e usando l'espressione della funzione gradino di Heaviside

$$\theta(1-x^2) = \begin{cases} 1 & 1-x^2 > 0 \Leftrightarrow |x| < 1 \\ 0 & 1-x^2 < 0 \Leftrightarrow |x| > 1 \end{cases} ,$$

si ha

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} \left|1-|x|^3\right| e^{-ikx} dx \,.$$

La funzione che moltiplica l'esponenziale è simmetrica rispetto all'origine, sfruttiamo questa proprietà per manipolare l'integrale nel modo seguente

$$\begin{aligned} \tilde{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} \left|1-|x|^3\right| e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} \left|1-|x|^3\right| (\cos(kx) + i\,\mathrm{sen}(kx))\, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} \left|1-|x|^3\right| \cos(kx) dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{1} \left|1-|x|^3\right| \cos(kx) dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{1} \left(1-x^3\right) \cos(kx) dx \,. \end{aligned}$$

Integriamo per parti, in particolare, integriamo la funzione trigonometrica e deriviamo il polinomio, fino ad arrivare ad una funzione integranda contenente la sola parte trigonometrica, ovvero

$$\begin{aligned} \tilde{f}(k) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{1} \left(1-x^3\right) \cos(kx) dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\left(1-x^3\right) \frac{\mathrm{sen}(kx)}{k} \bigg|_0^1 + \frac{3}{k} \int_0^1 x^2\,\mathrm{sen}(kx)\, dx \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi} \frac{3}{k}} \int_0^1 x^2\,\mathrm{sen}(kx)\, dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi} \frac{3}{k}} \left(-x^2 \frac{\cos(kx)}{k} \bigg|_0^1 + \frac{2}{k} \int_0^1 x\cos(kx)\, dx \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi} \frac{3}{k^2}} \left(-\cos(k) + 2 \int_0^1 x\cos(kx)\, dx \right) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi} \frac{3}{k^2}} \left[-\cos(k) + 2 \left(x \frac{\mathrm{sen}(kx)}{k} \bigg|_0^1 - \frac{1}{k} \int_0^1 \mathrm{sen}(kx)\, dx \right) \right] \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi} \frac{3}{k^2}} \left(-\cos(k) + \frac{2\,\mathrm{sen}(k)}{k} - \frac{2}{k} \int_0^1 \mathrm{sen}(kx)\, dx \right) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi} \frac{3}{k^2}} \left(-\cos(k) + \frac{2\,\mathrm{sen}(k)}{k} + 2\frac{\cos(k)-1}{k^2} \right) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi} \frac{3}{k^4}} \left(-k^2\cos(k) + 2k\,\mathrm{sen}(k) + 2(\cos(k)-1) \right) , \end{aligned}$$

da cui si ha anche

$$\tilde{f}(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi} \frac{3}{k^4}} \left(\left(2-k^2\right)\cos(k) + 2k\,\mathrm{sen}(k) - 2 \right) .$$