

METODI MATEMATICI PER LA FISICA

APPELLO STRAORDINARIO AUTUNNALE - 18 DICEMBRE 2024

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che il punteggio assegnato a ciascuna procedura di risoluzione può variare tra lo zero e il massimo indicato ed è stabilito valutando:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo;
6. la bellezza e l'armonia del tutto.

PRIMO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si ottenga l'espressione analitica della funzione

$$\mathbb{K}(k, z) = \text{Pr} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikt}}{t - z} dt,$$

definita per ogni $(k, z) \in (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{C}$.

Curiosità. Il simbolo $\mathbb{K}$ rappresenta il primo carattere, corrisponde alla lettera “a”, dell'alfabeto *aurebesh*, la rappresentazione grafica della lingua *Basic Galattico* o semplicemente *Basic* parlata dai personaggi dell'universo fantascientifico di *Guerre Stellari*. La parola *aurebesh*, così come la parola alfabeto, è la combinazione dei nomi delle prime due lettere, cioè, *Aurek* ($\mathbb{K}$) e *Besh* ($\mathbb{B}$).

SOLUZIONE DEL PRIMO PROBLEMA

Il valore principale è effettivo solo per valori reali di z . Consideriamo il caso in cui $z \notin \mathbb{R}$, in questa eventualità l'integrale in valore principale coincide con l'integrale ordinario. Possiamo usare il lemma di Jordan, “chiudendo” il percorso nel semipiano delle parti immaginarie positive o negative se, rispettivamente $k < 0$ o $k > 0$, ricordando che i valori di k sono reali e non nulli. Usando il teorema dei residui, si ha

$$\mathbb{K}(k, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikt}}{t - z} dt = 2i\pi \begin{cases} 0 & k < 0, \text{Im}(z) < 0 \\ e^{-ikz} & k < 0, \text{Im}(z) > 0 \\ -e^{-ikz} & k > 0, \text{Im}(z) < 0 \\ 0 & k > 0, \text{Im}(z) > 0 \end{cases} = -2i\pi \text{Segno}[k] \theta(-k \text{Im}(z)) e^{-ikz}.$$

Se, invece, $z = x \in \mathbb{R}$, calcoliamo il valore principale avvalendoci della formula di Sokhotski-Plemelj con il polo nel semipiano delle parti immaginarie positive, si ha

$$\mathbb{K}(k, x) = \text{Pr} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikt}}{t - x} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikt}}{t - (x + i\epsilon)} dt - i\pi e^{-ikx} = i\pi \begin{cases} 2e^{-ikx} - e^{-ikx} = e^{-ikx} & k < 0 \\ -e^{-ikx} & k > 0 \end{cases} \\ = -i\pi \text{Segno}[k] e^{-ikx}.$$

La soluzione completa è

$$\mathbb{K}(k, z) = -2i\pi \begin{cases} \text{Segno}[k] \theta(-k \text{Im}(z)) e^{-ikz} & \text{Im}(z) \neq 0 \\ \text{Segno}[k] \frac{e^{-ikz}}{2} & \text{Im}(z) = 0 \end{cases}.$$

È interessante notare come si possa scrivere con una legge unica usando per la funzione theta di Heaviside il valore in zero $\theta(0) = 1/2$, cioè la media dei limiti sinistro e destro,

$$\theta(0) = \frac{1}{2} \left(\underbrace{\theta(0^-)}_{=0} + \underbrace{\theta(0^+)}_{=1} \right) = \frac{1}{2}.$$

SECONDO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 5/30)

Si calcoli l'integrale in valore principale

$$\mathfrak{E}_a = \text{Pr} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x-a},$$

$\forall a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Curiosità. Il simbolo $\mathfrak{E}$ rappresenta la lettera “b” dell'alfabeto *aurebesh*.

SOLUZIONE DEL SECONDO PROBLEMA

Poiché $a \notin \mathbb{R}$, la funzione integranda non ha singolarità al finito lungo il percorso d'integrazione. È il comportamento all'infinito che va considerato in termini del valore principale, ovvero possiamo definire

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_a &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{dx}{x-a} = \lim_{R \rightarrow \infty} (\ln(R-a) - \ln(-R-a)) \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} (\ln|R-a| - \ln|-R-a| + i \arg(R-a) - i \arg(-R-a)) \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\ln \left(\frac{|R-a|}{|-R-a|} \right) + i \arctan \left(\frac{-\text{Im}(a)}{R - \text{Re}(a)} \right) - i \arctan \left(\frac{-\text{Im}(a)}{-R - \text{Re}(a)} \right) \right) \\ &= i \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\arctan \left(\frac{-\text{Im}(a)}{R - \text{Re}(a)} \right) - \arctan \left(\frac{-\text{Im}(a)}{-R - \text{Re}(a)} \right) \right), \end{aligned}$$

dove si è tenuto conto dell'annullamento del limite del logaritmo del rapporto dei moduli. Per valutare la differenza delle funzioni arcotangente assumiamo, senza perdita di generalità, la determinazione principale $[0, 2\pi]$ e $\text{Im}(a) > 0$, in questo caso, nel limite $R \rightarrow \infty$, l'argomento della prima funzione arcotangente si annulla nel quarto quadrante, la fase tende a 2π , mentre quello della seconda funzione lo fa nel terzo, cosicché la fase tende a π . Ne consegue che, per $\text{Im}(a) > 0$,

$$\mathfrak{E}_a = i \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\underbrace{\arctan \left(\frac{-\text{Im}(a)}{R - \text{Re}(a)} \right)}_{\rightarrow 2\pi} - \underbrace{\arctan \left(\frac{-\text{Im}(a)}{-R - \text{Re}(a)} \right)}_{\rightarrow \pi} \right) = i\pi.$$

Lo stesso risultato si ottiene con la determinazione principale $[-\pi, \pi]$, per cui avremmo

$$\mathfrak{E}_a = i \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\underbrace{\arctan \left(\frac{-\text{Im}(a)}{R - \text{Re}(a)} \right)}_{\rightarrow 0} - \underbrace{\arctan \left(\frac{-\text{Im}(a)}{-R - \text{Re}(a)} \right)}_{\rightarrow -\pi} \right) = i\pi.$$

Il caso in cui $\text{Im}(a) < 0$, poiché a è l'unico numero non reale dell'espressione, si ottiene facendo il complesso coniugato del risultato precedente, cioè

$$\mathfrak{E}_a = -i\pi.$$

In definitiva si ha

$$\mathfrak{E}_a = \text{Segno}[\text{Im}(a)] i\pi.$$

TERZO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si calcoli lo sviluppo di Mittag-Leffler della funzione

$$\mathfrak{F}(z) = \frac{1}{\text{sen}(z)} - \frac{1}{\text{senh}(z)}.$$

Curiosità. Il simbolo $\mathfrak{F}$ rappresenta la lettera “f” dell'alfabeto *aurebesh*.

SOLUZIONE DEL TERZO PROBLEMA

Le singolarità della funzione di $\zeta(z)$ corrispondono agli zeri delle funzioni seno e seno iperbolico, rispettivamente i punti degli insiemi $\{k\pi\}_{k \in \mathbb{Z}}$ e $\{ik\pi\}_{k \in \mathbb{Z}}$. L'intersezione dei due ha solo un elemento, l'origine. Verifichiamo che $z = 0$ è una singolarità eliminabile, calcolando il limite

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow 0} \zeta(z) &= \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{1}{z - z^3/3! + z^5/5! + \mathcal{O}(z^7)} - \frac{1}{z + z^3/3! + z^5/5! + \mathcal{O}(z^7)} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z} \left(\frac{1}{1 - (z^2/3! - z^4/5! + \mathcal{O}(z^6))} - \frac{1}{1 + (z^2/3! + z^4/5! + \mathcal{O}(z^6))} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + \mathcal{O}(z^6) \right)^k - \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \left(\frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \mathcal{O}(z^6) \right)^j \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + \mathcal{O}(z^6) \right)^k - \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \left(\frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \mathcal{O}(z^6) \right)^j \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z} \left(2 \frac{z^2}{3!} + \dots \right) = 0,\end{aligned}$$

è finto, quindi, come volevasi dimostrare, la singolarità è eliminabile. Le altre singolarità sono poli semplici e hanno residui

$$\begin{aligned}\text{Res}[\zeta(z), k\pi] &= \lim_{z \rightarrow k\pi} \zeta(z)(z - k\pi) = \lim_{z \rightarrow k\pi} \frac{z - k\pi}{\sin(z)} = (-1)^k, \\ \text{Res}[\zeta(z), ik\pi] &= \lim_{z \rightarrow ik\pi} \zeta(z)(z - ik\pi) = - \lim_{z \rightarrow ik\pi} \frac{z - ik\pi}{\sinh(z)} = (-1)^{k+1},\end{aligned}$$

$\forall k \in \mathbb{Z}$. Lo sviluppo di Mittag-Leffler è

$$\begin{aligned}\zeta(z) &= \phi(z) + \sum_{k \neq 0} (-1)^k \left(\frac{1}{z - k\pi} - \frac{1}{z - ik\pi} \right) \\ &= \phi(z) + 2z \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{z^2 - k^2\pi^2} - \frac{1}{z^2 + k^2\pi^2} \right) \\ &= \phi(z) + 4\pi^2 z \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k^2}{z^4 - k^4\pi^4},\end{aligned}$$

dove la funzione $\phi(z)$ è la parte intera di $\zeta(z)$ e ha lo stesso comportamento asintotico. Poiché la $\zeta(z)$ è regolare all'infinito, la funzione $\phi(z)$ è costante e per calcolarne il valore valutiamo l'espressione in $z = 0$. Si ha $\zeta(0) = 0$ e, poiché grazie al fattore z la serie si annulla nell'origine, è identicamente nulla anche la $\phi(z)$. Quindi la soluzione è

$$\zeta(z) = 4\pi^2 z \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k^2}{z^4 - k^4\pi^4}.$$

QUARTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 5/30)

Si ottengano gli autovalori e le rappresentazioni matriciali rispetto alla base ortonormale $\{|z_k\rangle\}_{k=1}^2$, dell'operatore $\hat{B} = \exp(\vec{a} \cdot \vec{\hat{\sigma}})$ e dei suoi autovettori, con $\vec{a} = (1, 1, 1)$ e $\vec{\hat{\sigma}} = (\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}_3)$, dove $\{\hat{\sigma}_j\}_{j=1}^3$ è l'insieme dei tre operatori di Pauli e la base ortonormale $\{|z_k\rangle\}_{k=1}^2$ ha come elementi gli autovettori del terzo operatore di Pauli $\hat{\sigma}_3$.

SOLUZIONE DEL QUARTO PROBLEMA

Sfruttando l'algebra degli operatori di Pauli, si ha

$$(\vec{a} \cdot \vec{\hat{\sigma}})^2 = \sum_{j,k=1}^3 a_j a_k \hat{\sigma}_j \hat{\sigma}_k = \sum_{j,k,m=1}^3 a_j a_k (i\epsilon_{jkm} \hat{\sigma}_m + \hat{I} \delta_{jk}) = 3\hat{I},$$

dove $\hat{I}$ è l'operatore identità. Il termine che dipende dal simbolo di Levi-Civita ϵ_{jkm} , con $j, k, m \in \{1, 2, 3\}$, è nullo poiché il prodotto $a_j a_k$ è simmetrico rispetto allo scambio degli indici. Usando la serie di Taylor dell'esponenziale per l'operatore $\hat{B}$ e separando potenze pari e dispari si ha

$$\begin{aligned}\hat{B} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\vec{a} \cdot \vec{\sigma})^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\vec{a} \cdot \vec{\sigma})^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\vec{a} \cdot \vec{\sigma})^{2k+1}}{(2k+1)!} = \hat{I} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{(2k)!} + \frac{\vec{a} \cdot \vec{\sigma}}{\sqrt{3}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^{k+1/2}}{(2k+1)!} \\ &= \hat{I} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sqrt{3}^{2k}}{(2k)!} + \frac{\vec{a} \cdot \vec{\sigma}}{\sqrt{3}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sqrt{3}^{2k+1}}{(2k+1)!},\end{aligned}$$

da cui, avvalendosi delle serie di Taylor delle funzioni iperboliche e la definizione del vettore $\vec{a}$, si ottiene

$$\hat{B} = \hat{I} \cosh(\sqrt{3}) + \frac{\hat{\sigma}_1 + \hat{\sigma}_2 + \hat{\sigma}_3}{\sqrt{3}} \sinh(\sqrt{3}).$$

Usando le rappresentazioni matriciali degli operatori di Pauli si ricava quella dell'operatore

$$\hat{B} \xrightarrow{z} B = \begin{pmatrix} \cosh(\sqrt{3}) + \sinh(\sqrt{3})/\sqrt{3} & (1-i)\sinh(\sqrt{3})/\sqrt{3} \\ (1+i)\sinh(\sqrt{3})/\sqrt{3} & \cosh(\sqrt{3}) - \sinh(\sqrt{3})/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Applicando il teorema spettrale, gli autovalori dell'operatore esponenziale possono essere ottenuti da quelli dell'operatore $\vec{a} \cdot \vec{\sigma}$, che, rispetto alla base $\{|z_k\rangle\}_{k=1}^2$, ha rappresentazione

$$\vec{a} \cdot \vec{\sigma} \xrightarrow{z} \vec{a} \cdot \vec{\sigma} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & -1 \end{pmatrix}.$$

L'equazione caratteristica è

$$\begin{aligned}\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1-i \\ 1+i & -1-\lambda \end{pmatrix} &= 0 \\ 1-\lambda^2+2 &= 0,\end{aligned}$$

le soluzioni e quindi gli autovalori dell'operatore $\vec{a} \cdot \vec{\sigma}$ sono

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{3}.$$

Di conseguenza, gli autovalori dell'operatore $\hat{B}$ sono

$$\beta_{1,2} = e^{\lambda_{1,2}} = e^{\pm\sqrt{3}}.$$

Gli autovettori degli operatori $\hat{B}$ e $\vec{a} \cdot \vec{\sigma}$ sono gli stessi, poiché, commutando, sono diagonalizzabili simultaneamente. Indichiamo con v_j^k la k -esima componente contro-variante del j -esimo autovettore, rappresentato rispetto alla base data, con $k, j \in \{1, 2\}$. Queste componenti si ottengono come soluzioni dei sistemi omogenei

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda_j & 1-i \\ 1+i & -1-\lambda_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_j^1 \\ v_j^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2.$$

Poniamo $v_{1,2}^1 = v$, per entrambi gli autovettori, dalla prima riga si ottiene

$$v_j^2 = -\frac{1-\lambda_j}{1-i}v \Rightarrow v_{1,2}^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{1-i}v.$$

Ne consegue che la rappresentazioni cercate sono

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{6-2\sqrt{3}}} \begin{pmatrix} 1-i \\ -1+\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{6+2\sqrt{3}}} \begin{pmatrix} 1-i \\ -1-\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

QUINTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si calcoli la trasformata di Fourier della funzione generalizzata

$$\mathcal{J}(x) = x^{n-2} \frac{d^n \delta(x)}{dx^n},$$

con $n \in \mathbb{N}$ e $n > 2$.

Curiosità. Il simbolo $\mathcal{J}$ rappresenta la lettera “j” dell’alfabeto *aurebesh*.

SOLUZIONE DEL QUINTO PROBLEMA

Usiamo il teorema della convoluzione, per cui si ha

$$\mathcal{F}_k[\mathcal{J}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}_k[x^{n-2}] * \mathcal{F}_k\left[\frac{d^n \delta(x)}{dx^n}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_{k-k'}[x^{n-2}] * \mathcal{F}_{k'}\left[\frac{d^n \delta(x)}{dx^n}\right] dk'.$$

La trasformata di Fourier della derivata n -esima della delta di Dirac è

$$\mathcal{F}_k\left[\frac{d^n \delta(x)}{dx^n}\right] = (ik)^n \mathcal{F}_k[\delta(x)] = \frac{(ik)^n}{\sqrt{2\pi}}.$$

La trasformata di Fourier della potenza intera $m \in \mathbb{N}$ è

$$\mathcal{F}_k[x^m] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^m e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} i^m \frac{d^m}{dk^m} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} dx = i^m \sqrt{2\pi} \frac{d^m \delta(k)}{dk^m},$$

dove abbiamo usato la rappresentazione della delta di Dirac

$$\delta(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} dx.$$

La trasformata di Fourier richiesta, quindi la convoluzione si calcola come

$$\mathcal{F}_k[\mathcal{J}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_{k-k'}[x^{n-2}] * \mathcal{F}_{k'}\left[\frac{d^n \delta(x)}{dx^n}\right] dk' = \frac{i^{2n-2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^{n-2} \delta(k-k')}{dk'^{n-2}} k'^n dk'.$$

Si procede integrando per parti, la prima integrazione dà

$$\mathcal{F}_k[\mathcal{J}] = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{2\pi}} \left(\underbrace{-\frac{d^{n-3} \delta(k-k')}{dk'^{n-3}} k'^n}_{=0} \Big|_{-\infty}^{\infty} + n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^{n-3} \delta(k-k')}{dk'^{n-3}} k'^{n-1} dk' \right).$$

Ripetendo l’integrazione per parti $n-2$ volte, si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_k[\mathcal{J}] &= \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{2\pi}} \left(\underbrace{-\delta(k-k') k'^3}_{=0} \Big|_{-\infty}^{\infty} + n(n-1) \cdots 4 \cdot 3 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(k-k') k'^2 dk' \right) \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{2\pi}} n(n-1) \cdots 4 \cdot 3 k^2. \end{aligned}$$

Per avere una forma più compatta, moltiplichiamo e dividiamo per 2, così da avere a numeratore $n!$ e quindi il risultato finale è

$$\mathcal{F}_k[\mathcal{J}] = \frac{(-1)^{n-1} n!}{2\sqrt{2\pi}} k^2.$$

SESTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 5/30)

Dati gli operatori $\hat{A}$ e $\hat{B}$, definiti nello spazio di Hilbert a N dimensioni E_N , tali che, cioè, $\hat{A}, \hat{B} : E_N \rightarrow E_N$, si ottengano le relazioni, qualora ve ne siano, tra gli spettri discreti $\sigma_{AB} = \{\mu_k\}_{k=1}^N$, $\sigma_{BA} = \{\nu_k\}_{k=1}^N$ e gli insiemi di autovettori $\{|x_k\rangle\}_{k=1}^N$, $\{|y_k\rangle\}_{k=1}^N \subset E_N$ dei due operatori prodotto $\hat{A}\hat{B}$ e $\hat{B}\hat{A}$, che hanno quindi equazioni agli autovalori

$$\hat{A}\hat{B}|x_k\rangle = \mu_k|x_k\rangle, \quad \hat{B}\hat{A}|y_k\rangle = \nu_k|y_k\rangle, \quad k \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

SOLUZIONE DEL SESTO PROBLEMA

Applicando da sinistra l'operatore $\hat{B}$ su ambo i membri dell'equazione agli autovalori dell'operatore $\hat{A}\hat{B}$, si ha

$$\hat{B}\hat{A}\hat{B}|x_k\rangle = \mu_k \hat{B}|x_k\rangle, \quad k \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

Questa è l'equazione agli autovalori dell'operatore $\hat{B}\hat{A}$, con l'insieme di autovettori $\{\hat{B}|x_k\rangle\}_{k=1}^N$. Ne consegue che gli insiemi di autovalori coincidono, ovvero i due operatori $\hat{A}\hat{B}$ e $\hat{B}\hat{A}$ hanno lo stesso spettro discreto, $\sigma_{AB} = \sigma_{BA}$. Riordiniamo, ad esempio, gli autovettori dell'operatore $\hat{B}\hat{A}$, in modo tale che le equazioni agli autovalori si “armonizzino”, ovvero si abbiano

$$\hat{A}\hat{B}|x_k\rangle = \mu_k |x_k\rangle, \quad \hat{B}\hat{A}|y_k\rangle = \mu_k |y_k\rangle, \quad k \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

In questo modo le relazioni che legano gli autovettori sono

$$\hat{B}|x_k\rangle \propto |y_k\rangle, \quad \hat{A}|y_k\rangle \propto |x_k\rangle, \quad k \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

Si ha la proporzionalità e non l'identità, poiché gli autovettori sono definiti a meno di una costante moltiplicativa. Introducendo delle costanti di proporzionalità, i cui insiemi sono $\{\alpha_k\}_{k=1}^N$ e $\{\beta_k\}_{k=1}^N$, si hanno

$$\hat{B}|x_k\rangle = \alpha_k |y_k\rangle, \quad \hat{A}|y_k\rangle = \beta_k |x_k\rangle, \quad k \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

Applichiamo da sinistra l'operatore $\hat{A}$ alla prima equazione e l'operatore $\hat{B}$ alla seconda

$$\hat{A}\hat{B}|x_k\rangle = \alpha_k \hat{A}|y_k\rangle = \alpha_k \beta_k |x_k\rangle, \quad \hat{B}\hat{A}|y_k\rangle = \beta_k \hat{B}|x_k\rangle = \beta_k \alpha_k |y_k\rangle, \quad k \in \{1, 2, \dots, N\},$$

confrontando queste equazioni con quelle agli autovalori degli operatori prodotto $\hat{A}\hat{B}$ e $\hat{B}\hat{A}$, si evince che il prodotto delle costanti di proporzionalità coincide con l'autovalore comune, cioè

$$\alpha_k \beta_k = \mu_k, \quad k \in \{1, 2, \dots, N\}.$$