Metodi Matematici per la Fisica

Appello straordinario invernale - 17 dicembre 2025

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che il punteggio assegnato a ciascuna procedura di risoluzione può variare tra lo zero e il massimo indicato ed è stabilito valutando:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo;
6. la bellezza e l'armonia del tutto.

Primo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$\text{ɝ} = \int_0^{2\pi} \frac{1+\operatorname{sen}^2(u)}{2+\cos^2(u)} du\,.$$

Curiosità. Il simbolo ɝ dell'alfabeto fonetico internazionale rappresenta la pronuncia in inglese americano del suono delle lettere **ir** della parola *bird*. L'alfabeto fonetico internazionale è un insieme di simboli utilizzati per indicare i suoni delle lingue parlate. È stato concepito nel 1886 dall'Associazione fonetica internazionale per definire un codice univoco con cui rappresentare i suoni (foni) di tutte le lingue.

Soluzione del primo problema

Facciamo la sostituzione $z = e^{iu}$, che implica $u = -i\ln(z)$, $du = -i dz/z$, il percorso d'integrazione è le circonferenza unitaria e l'integrale diventa

$$\text{ɝ} = -i\oint_{|z|=1} \frac{1-(z-1/z)^2/4}{2+(z+1/z)^2/4}\frac{dz}{z} = i\oint_{|z|=1}\frac{z^4-6z^2+1}{z^4+10z^2+1}\frac{dz}{z}\,.$$

La funzione integranda ha cinque poli semplici, uno nell'origine e quattro in corrispondenza degli zeri del polinomio z^4+10z^2+1, che sono

$$z_{1,2} = -\sqrt{-5\mp 2\sqrt{6}}\,,\qquad z_{3,4} = \sqrt{-5\pm 2\sqrt{6}}\,,$$

sono immaginari puri, infatti si possono porre nella forma

$$z_{1,2} = -i\sqrt{5\pm 2\sqrt{6}}\,,\qquad z_{3,4} = i\sqrt{5\mp 2\sqrt{6}}\,,$$

da cui

$$|z_1| = |z_4| = \sqrt{5+2\sqrt{6}} > 1\,,\qquad |z_2| = |z_3| = \sqrt{5-2\sqrt{6}} < 1\,.$$

Il percorso d'integrazione avvolge quindi i tre poli semplici: $z_0 = 0$, $z_2 = -i\sqrt{5-2\sqrt{6}}$ e $z_3 = i\sqrt{5-2\sqrt{6}}$. Usando il teorema dei residui e $z_2^2 = z_3^2 = 2\sqrt{6}-5$, si ha

$$\begin{aligned}
\text{ɝ} &= -2\pi\left(\operatorname{Res}\left[\frac{z^4-6z^2+1}{z^4+10z^2+1}\frac{1}{z}, z_0\right] + \operatorname{Res}\left[\frac{z^4-6z^2+1}{z^4+10z^2+1}\frac{1}{z}, z_2\right] + \operatorname{Res}\left[\frac{z^4-6z^2+1}{z^4+10z^2+1}\frac{1}{z}, z_3\right]\right)\\
&= -2\pi\left(1+\frac{z_2^4-6z_2^2+1}{4z_2^4+20z_2^2}+\frac{z_3^4-6z_3^2+1}{4z_3^4+20z_3^2}\right) = -2\pi\left(1+2\frac{z_2^4-6z_2^2+1}{4z_2^4+20z_2^2}\right)\\
&= -2\pi\left(1-2\frac{\sqrt{6}}{3}\right),
\end{aligned}$$

quindi

$$\mathfrak{Z} = \int_0^{2\pi} \frac{1+\operatorname{sen}^2(u)}{2+\cos^2(u)} du = \frac{2}{3}\pi\left(-3+2\sqrt{6}\right).$$

SECONDO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si ottenga la somma della serie

$$\text{ɮ} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{k^2-1}{k^4+1}.$$

Curiosità. Il simbolo ɮ dell'alfabeto fonetico internazionale rappresenta la pronuncia in zulu del suono delle lettere **dl** della parola *indlala*.

SOLUZIONE DEL SECONDO PROBLEMA

Usiamo il metodo dei residui, considerando la funzione $f(z) = \left(z^2-1\right)/\left(z^4+1\right)$, per cui si ha

$$\text{ɮ} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k).$$

La serie è a segno costante, perciò usiamo la funzione di lavoro

$$F(z) = \pi \frac{\cos(\pi z)}{\operatorname{sen}(\pi z)} f(z),$$

che ha poli semplici nei relativi, ovvero gli elementi dell'insieme $\{z_k = k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ e anche nei quattro zeri del polinomio di quarto grado a denominatore della funzione $f(z)$, che sono le quattro radici quarte di -1, elementi dell'insieme

$$\left\{p_j = e^{(2j+1)i\pi/4}\right\}_{j=0}^{3}.$$

Definiamo gli integrali

$$J_n = \frac{1}{2i\pi}\oint_{|z|=n+1/2} F(z)dz = \sum_{k=-n}^{n} \operatorname{Res}\left[F(z),k\right] + \sum_{j=0}^{3} \operatorname{Res}\left[F(z),p_j\right], \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}.$$

I residui nei relativi hanno la forma dei termini della serie, cioè, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$,

$$[F(z),k] = \frac{k^2-1}{k^4+1}.$$

La somma dei residui nei poli dell'insieme $\left\{p_j = e^{(2j+1)i\pi/4}\right\}_{j=0}^{3}$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{3}\left[F(z),p_j\right] &= \pi\sum_{j=0}^{3}\frac{\cos\left(\pi p_j\right)}{\operatorname{sen}\left(\pi p_j\right)}\frac{p_j^2-1}{4p_j^3} = -\frac{\pi}{4}\sum_{j=0}^{3}\frac{\cos\left(\pi p_j\right)}{\operatorname{sen}\left(\pi p_j\right)}\left(p_j^2-1\right)p_j = -\frac{\pi}{4}\sum_{j=0}^{3}\frac{\cos\left(\pi p_j\right)}{\operatorname{sen}\left(\pi p_j\right)}\left(p_j-p_j^{-1}\right)p_j^2 \\
&= -\frac{i\pi}{2}\sum_{j=0}^{3}\frac{\cos\left(\pi p_j\right)}{\operatorname{sen}\left(\pi p_j\right)}\operatorname{sen}\left(\frac{(2j+1)\pi}{4}\right)p_j^2 \\
&= -\frac{i\pi}{2}\cot\left(\pi\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)e^{i\pi/2} - \frac{i\pi}{2}\cot\left(\pi\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)e^{3i\pi/2} \\
&\quad -\frac{i\pi}{2}\cot\left(\pi\frac{-1-i}{\sqrt{2}}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right)e^{5i\pi/2} - \frac{i\pi}{2}\cot\left(\pi\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{4}\right)e^{7i\pi/2} \\
&= \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\cot\left(\pi\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) - \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\cot\left(\pi\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right) - \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\cot\left(\pi\frac{-1-i}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\cot\left(\pi\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{2}}\left(\cot\left(\pi\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) + \cot\left(\pi\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)\right)
\end{aligned}$$

È immediato verificare che

$$\lim_{n\to\infty} J_n = 0\,,$$

infatti, usando il lemma di integrazione sugli archi di raggio divergente, dimostriamo che su tali archi la funzione integranda moltiplicata per z tende uniformemente a zero. A tal fine, ne maggioriamo il modulo come

$$|zF(z)| = \left|\pi\frac{\cos(\pi z)}{\operatorname{sen}(\pi z)}\frac{z^2-1}{z^4+1}z\right| = \pi\left|\frac{\cos(\pi z)}{\operatorname{sen}(\pi z)}\right|\left|\frac{z^2-1}{z^4+1}\right||z| \le \pi\left|\frac{\cos(\pi z)}{\operatorname{sen}(\pi z)}\right|\frac{(n+1/2)^2+1}{(n+1/2)^4-1}\left(n+\frac{1}{2}\right),$$

la disuguaglianza è ottenuta usando la disuguaglianza triangolare per il numeratore e il denominatore che, con $n\in\mathbb{N}$, sono rispettivamente

$$\left|z^2-1\right| \le |z|^2+1 = \left(n+\frac{1}{2}\right)^2+1\,, \qquad \left|z^4+1\right| \le \left||z|^4-1\right| = \left(n+\frac{1}{2}\right)^4-1\,.$$

La funzione cotangente, quindi il suo modulo, diverge per $z = k\pi$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$, quindi sulle circonferenze di raggio $n+1/2$, con $n\in\mathbb{N}$ è limitata, ovvero, esiste un $M\in(0,\infty)$, tale che, per ogni z, con $|z| = n+1/2$, si ha

$$\left|\frac{\cos(\pi z)}{\operatorname{sen}(\pi z)}\right| \le M$$

e, per la periodicità della funzione cotangente, questa limitazione vale per ogni $n\in\mathbb{N}$. Ne consegue che, sempre per ogni z, tale che $|z| = n+1/2$,

$$|F(z)| \le \pi M\frac{(n+1/2)^2+1}{(n+1/2)^4-1}\left(n+\frac{1}{2}\right)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,,$$

che implica il limite della successione di integrali già dato, cioè

$$\lim_{n\to\infty} J_n = 0\,,$$

quindi

$$0 = \lim_{n\to\infty} J_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=-n}^{n}\operatorname{Res}\left[F(z),k\right] + \sum_{j=0}^{3}\operatorname{Res}\left[F(z),p_j\right]\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{k^2-1}{k^4+1} + \sum_{j=0}^{3}\operatorname{Res}\left[F(z),p_j\right],$$

da cui si ottiene la somma della serie richiesta come

$$\mathfrak{Z} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{k^4+1}{k^2-1} = -\frac{\pi}{\sqrt{2}}\left(\cot\left(\pi\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)+\cot\left(\pi\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

e ancora

$$\mathfrak{Z} = -\sqrt{2}\pi\operatorname{Re}\left(\cot\left(\pi\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)\right).$$

TERZO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Definiamo il fattoriale n-esimo del numero $k \in \mathbb{N}$, che è il multiplo n-esimo del numero $j \in \mathbb{N}$ aumentato di una unità, cioè $k = n \cdot j + 1$, come

$$k!^n = k(k-n)(k-2n)\cdots(n+1)1\,,$$

dove il simbolo $!^n$ indica appunto questo fattoriale con salto n-esimo. Ad esempio, con $n = 1$ si ha il fattoriale semplice, con $n = 2$ il doppio fattoriale, che, per il numero dispari $k = 2j + 1$, vale

$$k!^2 = k!! = k(k-2)\cdots 3 \cdot 1\,.$$

Si dimostri che in generale, $\forall\,(m,n) \in \mathbb{N}^2$,

$$((m-1)n+1)!^n = \frac{(m-1)!n^m}{\beta(n^{-1},m)}\,,$$

dove $\beta(z,u)$ è la funzione beta di Eulero.

SOLUZIONE DEL TERZO PROBLEMA

Sviluppiamo la funzione beta di Eulero a denominatore, usando l'identità

$$\beta(z,u) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(u)}{\Gamma(z+u)}$$

e la legge di ricorrenza della funzione gamma di Eulero

$$\Gamma(z+n) = (z+n-1)(z+n-2)\cdots(z+1)z\Gamma(z)\,, \qquad \forall\,k \in \mathbb{N}\,,$$

si ha

$$\begin{aligned}
\beta\left(n^{-1},m\right) &= \frac{\Gamma\left(n^{-1}\right)\Gamma(m)}{\Gamma(n^{-1}+m)} = \frac{\Gamma\left(n^{-1}\right)(m-1)!}{(n^{-1}+m-1)(n^{-1}+m-2)\cdots(n^{-1}+1)\,n^{-1}\Gamma(n^{-1})} \\
&= \frac{(m-1)!}{(n^{-1}+m-1)(n^{-1}+m-2)\cdots(n^{-1}+1)\,n^{-1}} \\
&= \frac{(m-1)!}{\frac{1+(m-1)n}{n}\frac{1+(m-2)n}{n}\cdots\frac{1+n}{n}\frac{1}{n}} = \frac{(m-1)!n^m}{(1+(m-1)n)(1+(m-2)n)\cdots(1+n)}\,,
\end{aligned}$$

la quantità a denominatore dell'ultimo membro è il fattoriale n-esimo del numero naturale $1 + (m-1)n$, ovvero

$$(1+(m-1)n)(1+(m-2)n)\cdots(1+n) \equiv ((m-1)n+1)!^n\,,$$

che è la quantità richiesta. Risolvendo per essa otteniamo l'identità del problema

$$((m-1)n+1)!^n = \frac{(m-1)!n^m}{\beta\left(n^{-1},m\right)}\,.$$

QUARTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

L'operatore $\hat{ʁ}$, definito nello spazio di Hilbert a 4 dimensioni E_4, rispetto alla base ortonormale $\{|u_k\rangle\}_{k=1}^4 \subset E_4$ è rappresentato dalla matrice in notazione a blocchi

$$\hat{ʁ} \overset{u}{\hookleftarrow} ʁ = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 \\ \sigma_3 & I_2 \end{pmatrix},$$

dove σ_j, con $j \in \{1,2,3\}$, è la j-esima matrice di Pauli e I_2 è la matrice identità 2×2. Si ottengano gli autovalori dell'operatore $\hat{ʁ}$ e i vettori che rappresentano i suoi autovettori rispetto alla base canonica data.

Curiosità. Il simbolo ʁ dell'alfabeto fonetico internazionale rappresenta la pronuncia in francese del suono della lettera **r** della parola *Paris*.

Soluzione del quarto problema

Le equazioni agli autovalori per le matrici in notazione a blocchi sono

$$\text{ʁ}\, r_j = \rho_j r_j\,, \qquad \text{con: } j = 1,2,3,4\,,$$

dove $\{\rho_j\}_{j=1}^4$ e $\{r_j\}_{j=1}^4$ sono gli insiemi degli autovalori e dei vettori 4×1 che rappresentano gli autovettori corrispondenti. Usiamo

$$r_j = \begin{pmatrix} u_j \\ d_j \end{pmatrix}, \qquad \forall\, j \in \{1,2,3,4\}\,,$$

dove u_j e d_j sono vettori 2×1.

$$\text{ʁ}\, r_j = \begin{pmatrix} \sigma_1 u_j + \sigma_2 d_j \\ \sigma_3 u_j + d_j \end{pmatrix} = \rho_j r_j = \rho_j \begin{pmatrix} u_j \\ d_j \end{pmatrix},$$

da cui si hanno le equazioni

$$\begin{aligned} \sigma_1 u_j + \sigma_2 d_j &= \rho_j u_j \\ \sigma_3 u_j + d_j &= \rho_j d_j\,. \end{aligned}$$

È un sistema di due equazioni matriciali, otteniamo d_j dalla seconda

$$d_j = \frac{1}{\rho_j - 1}\sigma_3 u_j\,, \qquad \forall\, j \in \{1,2,3,4\}\,,$$

e la sostituiamo nella prima

$$\begin{aligned} \sigma_1 u_j + \frac{1}{\rho_j - 1}\sigma_2\sigma_3 u_j &= \rho_j u_j \\ \sigma_1 u_j + \frac{1}{\rho_j - 1} i \sigma_1 u_j &= \rho_j u_j \\ \frac{\rho_j - 1 + i}{\rho_j - 1}\sigma_1 u_j &= \rho_j u_j \\ \sigma_1 u_j &= \frac{(\rho_j - 1)\rho_j}{\rho_j - 1 + i} u_j\,, \qquad \forall\, j \in \{1,2,3,4\}\,. \end{aligned}$$

Questa è l'equazione agli autovalori della matrice σ_1, è noto che gli autovalori sono $\lambda_\pm = \pm 1$ e gli autovettori corrispondenti sono

$$v_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}.$$

In corrispondenza di ciascun autovalore λ se ne hanno due ρ, ovvero, per $\lambda_+ = 1$

$$1 = \frac{(\rho - 1)\rho}{\rho - 1 + i} \quad \Rightarrow \quad \rho^2 + 2\rho + 1 - i = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho_{1,2} = 1 \pm \sqrt{i}\,,$$

con $\lambda_- = -1$ si ha

$$-1 = \frac{(\rho - 1)\rho}{\rho - 1 + i} \quad \Rightarrow \quad \rho^2 - 1 + i = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho_{3,4} = \pm\sqrt{1 - i}\,.$$

Otteniamo i vettori corrispondenti. Avremo che che $u_1 = u_2 = v_+$ e $u_3 = u_4 = v_-$. I vettori d_j si ricavano dalla relazione

$$d_j = \frac{1}{\rho_j - 1}\sigma_3 u_j\,, \qquad \forall\, j \in \{1,2,3,4\}\,,$$

quindi

$$
\begin{aligned}
d_{1,2} &= \frac{1}{\rho_{1,2}-1}\sigma_3 v_+ = \frac{1}{\pm\sqrt{i}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \pm\frac{1}{\sqrt{2i}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \\
d_{3,4} &= \frac{1}{\rho_{3,4}-1}\sigma_3 v_- = \frac{1}{\pm\sqrt{1-i}-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\pm\sqrt{1-i}-1}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

I quattro autovettori non normalizzati sono

$$
r_1' = \sqrt{2}\begin{pmatrix} u_1 \\ d_1 \end{pmatrix} = \sqrt{2}\begin{pmatrix} v_+ \\ d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1/\sqrt{i} \\ -1/\sqrt{i} \end{pmatrix}, \qquad r_2' = \sqrt{2}\begin{pmatrix} u_2 \\ d_2 \end{pmatrix} = \sqrt{2}\begin{pmatrix} v_+ \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1/\sqrt{i} \\ 1/\sqrt{i} \end{pmatrix},
$$

$$
r_3' = \sqrt{2}\begin{pmatrix} u_3 \\ d_3 \end{pmatrix} = \sqrt{2}\begin{pmatrix} v_- \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \frac{1}{\sqrt{1-i}-1} \\ \frac{1}{\sqrt{1-i}-1} \end{pmatrix}, \qquad r_4' = \sqrt{2}\begin{pmatrix} u_4 \\ d_4 \end{pmatrix} = \sqrt{2}\begin{pmatrix} v_- \\ d_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \frac{1}{-\sqrt{1-i}-1} \\ \frac{1}{-\sqrt{1-i}-1} \end{pmatrix}.
$$

Le norme dei primi due sono uguali e valgono

$$
\left\| r_1' \right\| = \left\| r_2' \right\| = 2\,.
$$

Quelle del terzo e quarto sono

$$
\begin{aligned}
\left\| r_{3,4}' \right\| &= \sqrt{2 + \frac{2}{\left|\sqrt{1-i}\mp 1\right|}} = \sqrt{2 + \frac{2}{\left|2^{1/4}e^{-i\pi/8}\mp 1\right|^2}} \\
&= \sqrt{2 + \frac{2}{\left(2^{1/4}\cos(\pi/8)\mp 1\right)^2 + \sqrt{2}\,\mathrm{sen}^2(\pi/8)}} \\
&= \sqrt{2 + \frac{2}{1+\sqrt{2}\mp 2^{5/4}\cos(\pi/8)}} = \sqrt{\frac{4+2\sqrt{2}\mp 2^{9/4}\cos(\pi/8)}{1+\sqrt{2}\mp 2^{5/4}\cos(\pi/8)}}\,.
\end{aligned}
$$

Infine, usiamo la formula di bisezione

$$
\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1\,,
$$

nella forma

$$
\cos(\alpha) = \pm\sqrt{\frac{\cos(2\alpha)+1}{2}}\,,
$$

per ottenere

$$
\cos(\pi/8) = \sqrt{\frac{\cos(\pi/4)+1}{2}} = \sqrt{\frac{1/\sqrt{2}+1}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\,,
$$

che sostituito nell'espressione delle norme dà

$$
\left\| r_{3,4}' \right\| = \sqrt{\frac{4+2\sqrt{2}\mp 2^{5/4}\sqrt{2+\sqrt{2}}}{1+\sqrt{2}\mp 2^{1/4}\sqrt{2+\sqrt{2}}}} = \sqrt{\frac{4+2\sqrt{2}\mp 2\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{1+\sqrt{2}\mp \sqrt{2+2\sqrt{2}}}} = \sqrt{2}\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}\mp \sqrt{2+2\sqrt{2}}}{1+\sqrt{2}\mp \sqrt{2+2\sqrt{2}}}}\,.
$$

Gli autovettori normalizzati sono

$$
r_{1,2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \pm 1/\sqrt{i} \\ \mp 1/\sqrt{i} \end{pmatrix}, \qquad r_{3,4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}\mp\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2+\sqrt{2}\mp\sqrt{2+2\sqrt{2}}}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \frac{1}{\pm\sqrt{1-i}-1} \\ \frac{1}{\pm\sqrt{1-i}-1} \end{pmatrix}.
$$

Quinto problema (punteggio massimo: 5/30)

Si dimostri l'identità formale per le funzioni generalizzate delta di Dirac

$$\delta(x-x_0)=3|x_0|^2\delta\left(x^3-x_0^3\right)+3|x_0|^2\delta\left(x^2-x_0^2\right)-\frac{3}{2}|x_0|\delta\left(x-x_0\right)-\frac{3}{2}|x_0|\delta\left(x+x_0\right),$$

con $x_0\in\mathbb{R}$.

Soluzione del quinto problema

Possiamo usare le relazione formale della delta di Dirac

$$\delta\left(f(x)\right)=\sum_{k=1}^{N}\frac{\delta\left(x-x_k\right)}{|f'(x)|},$$

dove la funzione $f(x)$ ha zeri reali nei punti dell'insieme $\{x_k\}_{k=1}^{N}\subset\mathbb{R}$ e, inoltre, questi zeri sono semplici.
Nel caso delle delta di Dirac con argomento non lineare si hanno

$$\delta\left(x^2-x_0^2\right)=\frac{\delta(x-x_0)+\delta(x+x_0)}{2|x_0|},\qquad \delta\left(x^3-x_0^3\right)=\frac{\delta(x-x_0)}{3|x_0|^2}.$$

Si noti che dei tre zeri della funzione $x^3-x_0^3$, argomento della seconda delta di Dirac, solo uno è reale, quindi si ha il solo termine a esso corrispondente.
Sostituendo queste espressioni a secondo membro dell'espressione data, si ha

$$\begin{aligned}3|x_0|^2\delta\left(x^3-x_0^3\right)+3|x_0|^2\delta\left(x^2-x_0^2\right)-\frac{3}{2}|x_0|\delta\left(x-x_0\right)-\frac{3}{2}|x_0|\delta\left(x+x_0\right)=\delta(x-x_0)&\\+\frac{3}{2}|x_0|\left(\delta(x-x_0)+\delta(x+x_0)\right)&\\-\frac{3}{2}|x_0|\delta\left(x-x_0\right)-\frac{3}{2}|x_0|\delta\left(x+x_0\right),&\end{aligned}$$

gli ultimi quattro termini del secondo membro si annullano due a due e, scambiando i membri, si ottiene

$$\delta(x-x_0)=3|x_0|^2\delta\left(x^3-x_0^3\right)+3|x_0|^2\delta\left(x^2-x_0^2\right)-\frac{3}{2}|x_0|\delta\left(x-x_0\right)-\frac{3}{2}|x_0|\delta\left(x+x_0\right),$$

che è l'identità richiesta.

Sesto problema (punteggio massimo: 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$\text{ɕ}(w)=\frac{1}{2i\pi}\int_{\rho}\Gamma(z)w^{-z}dz,$$

dove $\rho=\{z\,:\,z=c+iy,\text{con: } c\in(0,\infty),\forall y\in\mathbb{R}\}$ è la retta parallela all'asse immaginario e appartenente al semipiano delle parti reali positive e $w\in(0,\infty)$.

Curiosità. Il simbolo ɕ dell'alfabeto fonetico internazionale rappresenta la pronuncia in giapponese del suono delle lettere **sh** della parola *sushi*.

Soluzione del sesto Problema

Usiamo la rappresentazione con l'integrale di secondo tipo di Eulero per la funzione gamma

$$\mathfrak{G}(w) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\rho} dz \int_0^{\infty} dt e^{-t} t^{z-1} w^{-z}\,.$$

Poniamo $t^{z-1} = e^{(z-1)\ln t}$ e $w^{-z} = e^{-z\ln(w)}$

$$\mathfrak{G}(w) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\rho} dz \int_0^{\infty} dt e^{-t+(z-1)\ln(t)-z\ln(w)} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\rho} dz \int_0^{\infty} dt e^{-t+z\ln(t/w)-\ln(t)}\,.$$

Facciamo la sostituzione $z = c + iy$, cosicché l'integrazione in dz diventa in dy e l'intervallo è $\mathbb{R}$, si ha

$$\mathfrak{G}(w) = \frac{1}{2i\pi}\int_{-\infty}^{\infty} i dy \int_0^{\infty} dt e^{-t+(c+iy)\ln(t/w)-\ln(t)} = \int_0^{\infty} dt \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dy e^{iy\ln(t/w)}\right) e^{-t+c\ln(t/w)-\ln(t)}\,,$$

dove abbiamo messo tra parentesi l'integrale in dy, che, poiché nelle condizioni del problema si ha sempre $t/w \in \mathbb{R}$, rappresenta la delta di Dirac $\delta(\ln(t/w))$. Ne consegue

$$\mathfrak{G}(w) = \int_0^{\infty} \delta(\ln(t/w))\, e^{-t+c\ln(t/w)-\ln(t)} dt = \left.\frac{e^{-t+c\ln(t/w)-\ln(t)}}{|d\ln(t/w)/dt|}\right|_{t=w} = \left.\frac{e^{-t}/t}{|1/t|}\right|_{t=w}\,,$$

in definitiva, avendo $w \in (0, \infty)$,

$$\mathfrak{G}(w) = e^{-w}\,.$$