

METODI MATEMATICI PER LA FISICA

SECONDO APPELLO ESTIVO - 13 LUGLIO 2026

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che il punteggio assegnato a ciascuna procedura di risoluzione può variare tra lo zero e il massimo indicato ed è stabilito valutando:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo;
6. la bellezza e l'armonia del tutto.

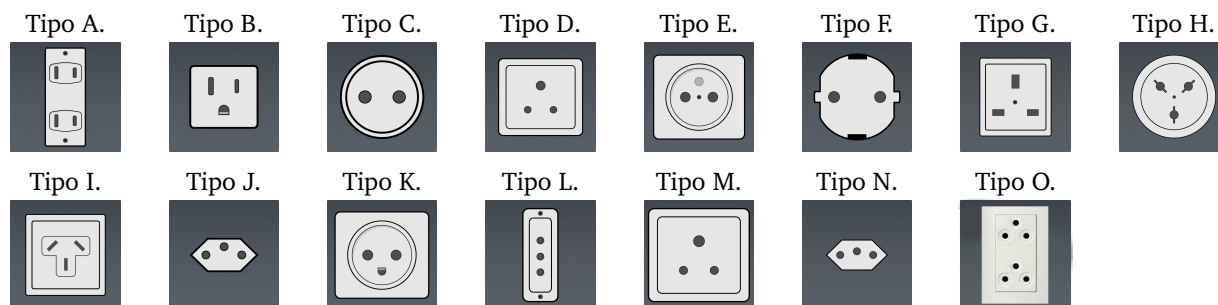
PRIMO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Dopo averne determinato il dominio di convergenza nel piano complesso a , si calcoli l'espressione analitica della funzione di a rappresentata dall'integrale

$$\boxed{\int}_{a} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-1/w^2} w^{-2a} dw.$$

Utilità. Il risultato contiene la funzione gamma di Eulero.

Curiosità. Prima della fine del diciannovesimo secolo l'elettricità, ovvero la corrente elettrica come vettore energetico, veniva usata solo per l'illuminazione pubblica. L'uso casalingo, per alimentare gli elettrodomestici, si è diffuso a partire dai primi anni del '900. Da allora, ciascun paese ha sviluppato il suo sistema di spine e prese elettriche, seguendo necessità particolari e locali. Tra queste, la compatibilità con sistemi di prese e spine esteri non era prioritaria vista, non solo la rarità dei viaggi internazionali, ma soprattutto l'impossibilità di trasportare i massicci e ingombranti elettrodomestici disponibili in quel periodo storico. Con l'aumentare della propensione a viaggiare e con l'avanzamento della tecnologia, che permetteva di produrre elettrodomestici più piccoli e leggeri, e quindi trasportabili, cominciarono i programmi di standardizzazione, che subirono, però, importanti battute d'arresto dovuti a tragici eventi globali, come la seconda guerra mondiale. I tentavi di uniformare i sistemi elettrici ripresero negli '50, dopo la guerra. Però, molti paesi, in cui la rete elettrica era già diffusa, non riuscirono a mettere in atto un aggiornamento su larga scala dei sistemi di spine e prese, per il costo enorme che avrebbe comportato. Ecco perché le differenze sono presenti anche oggi. La Commissione Elettrotecnica Internazionale (IEC), fondata nel 1906 con l'obiettivo di definire norme condivise nell'ambito delle tecnologie elettriche ed elettroniche, lavora per uniformare i sistemi e per renderli sicuri e compatibili con l'uso di semplici adattatori (<https://www.iec.ch/>). La figura sottostante (<https://www.iec.ch/>) mostra i 15 sistemi di spine e prese in uso nel mondo, sono indicati con le prime 15 lettere maiuscole dell'alfabeto inglese: A, B, ..., N, O.



Il simbolo $\boxed{\int}$, che indica l'integrale del primo problema, è quello dalla presa di tipo A, usata nell'America del Nord e centrale, e in Giappone.

SOLUZIONE DEL PRIMO PROBLEMA

Separiamo l'integrale come

$$\mathbb{E}_a = \int_0^\infty e^{-1/w^2} w^{-2a} dw + \int_{-\infty}^0 e^{-1/w^2} w^{-2a} dw,$$

nel secondo facciamo il cambiamento di variabile $w = -u$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_a &= \int_0^\infty e^{-1/w^2} w^{-2a} dw + (-1)^{-2a} \int_0^\infty e^{-1/u^2} u^{-2a} du = \{\text{usiamo la stessa variabile } w \text{ in entrambi gli integrali}\} \\ &= (1 + e^{-2i\pi a}) \int_0^\infty e^{-1/w^2} w^{-2a} dw = 2e^{-i\pi a} \cos(\pi a) \int_0^\infty e^{-1/w^2} w^{-2a} dw. \end{aligned}$$

Facciamo il cambiamento di variabile $t = 1/w^2$, da cui: $2w dw = -dt/t^2$,

$$\mathbb{E}_a = e^{-i\pi a} \cos(\pi a) \int_0^\infty e^{-t} t^{-(2a-1)/2} \frac{dt}{t^2} = e^{-i\pi a} \cos(\pi a) \int_0^\infty e^{-t} t^{a-3/2} dt.$$

La condizione di convergenza si ottiene dall'ultimo integrale, che un integrale di Eulero di secondo tipo, ed è

$$\operatorname{Re}\left(a - \frac{3}{2}\right) > -1 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Re}(a) > \frac{1}{2}.$$

Ne consegue che, nel semipiano $D_{1/2} = \{a : \operatorname{Re}(a) > 1/2\}$,

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{a-3/2} dt = \Gamma\left(a - \frac{1}{2}\right),$$

quindi

$$\mathbb{E}_a = e^{-i\pi a} \cos(\pi a) \Gamma\left(a - \frac{1}{2}\right).$$

SECONDO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$\mathbb{E} = \int_0^\infty \frac{(x^{1/3} + 1)^3}{x^4 + 1} dx.$$

Curiosità. Il simbolo $\mathbb{E}$, che indica l'integrale, è quello dalla presa di tipo C, usata in Europa, ad eccezione del Regno Unito, dell'Irlanda, di Cipro e di Malta.

SOLUZIONE DEL SECONDO PROBLEMA

Valutiamo il cubo del binomio a numeratore

$$\mathbb{E} = \int_0^\infty \frac{(x^{1/3} + 1)^3}{x^4 + 1} dx = \int_0^\infty \frac{x + 3x^{2/3} + 3x^{1/3} + 1}{x^4 + 1} dx \equiv J_1 + 3J_{2/3} + 3J_{1/3} + J_0,$$

dove abbiamo definito l'integrale J_α come

$$J_\alpha = \int_0^\infty \frac{x^\alpha}{x^4 + 1} dx.$$

Consideriamo i due casi in cui α assume valore intero, $\alpha = 1$ e nullo. Nel primo caso, la funzione integranda è razionale si ha

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_0^\infty \frac{x}{x^4+1} dx = \int_0^\infty \frac{x}{(x^2-i)(x^2+i)} dx = \frac{1}{2i} \left(\int_0^\infty \frac{x}{x^2-i} dx - \int_0^\infty \frac{x}{x^2+i} dx \right) \\ &= \frac{1}{4i} \ln \left(\frac{x^2-i}{x^2+i} \right) \Big|_0^\infty = \frac{1}{4i} \left(-\ln \left(\frac{e^{i\pi/3}}{e^{3i\pi/2}} \right) \right) = \frac{1}{4i} (-\ln(e^{-i\pi})) , \end{aligned}$$

dove abbiamo considerato la determinazione principale $\arg(z) \in (0, 2\pi)$, quindi $i = e^{i\pi/2}$ e $-i = e^{3i\pi/2}$, il risultato è

$$J_1 = \frac{\pi}{4} .$$

Per J_0 , usiamo la parità della funzione integranda e usiamo il lemma di Jordan e, potendo scegliere, chiudiamo il percorso nel semipiano delle parti immaginarie positive, si ha

$$\begin{aligned} J_0 &= \int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^4+1} = i\pi \left(\text{Res} \left[\frac{1}{z^4+1}, e^{i\pi/4} \right] + \text{Res} \left[\frac{1}{z^4+1}, e^{3i\pi/4} \right] \right) \\ &= i\pi \left(-\frac{e^{i\pi/4}}{4} - \frac{e^{3i\pi/4}}{4} \right) = -\frac{i\pi}{4\sqrt{2}} (1+i-1+i) = -\frac{i\pi}{4\sqrt{2}} (-2i) \\ J_0 &= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} . \end{aligned}$$

Per i due integrali con α razionale, $J_{2/3}$ e $J_{1/3}$, usiamo la formula per l'integrazione di funzioni polidrome,

$$I_\beta = \int_0^\infty R(x)x^\beta dx = -\frac{\pi e^{-i\beta\pi}}{\text{sen}(\beta\pi)} \sum_{j=1}^N \text{Res} [R(z)z^\beta, z_j] ,$$

dove $\beta \notin \mathbb{Z}$ ed $R(x)$ è una funzione razionale, $\{z_j\}_{j=1}^N$ è l'insieme dei suoi poli, che ha intersezione vuota con il semiasse reale positivo. Inoltre, deve essere verificata la condizione di convergenza

$$-1-l < \text{Re}(\beta) < -1-h ,$$

dove $l, h \in \mathbb{Z}$ sono le potenze che descrivono il comportamento limite della funzione razionale, rispettivamente, nell'origine e all'infinito. Si hanno, cioè,

$$\begin{aligned} R(x) &= \mathcal{O}(x^l) , & x \rightarrow 0^+ , \\ R(x) &= \mathcal{O}(x^h) , & x \rightarrow \infty . \end{aligned}$$

Nel caso in esame

$$R(x) = \frac{1}{x^4+1} \quad \Rightarrow \quad (l, h) = (0, -4) ,$$

e si hanno due valori: $\beta = 1/3$, $\beta = 2/3$ per i quali

$$-1 < \frac{1}{3} < 3, \quad -1 < \frac{2}{3} < 3 ,$$

valgono le condizioni di convergenza.

Avendo la stessa funzione razionale, si ha lo stesso insieme di poli semplici $\{z_j = e^{(2j+1)i\pi/4}\}_{j=0}^3$. Calcoliamo l'integrale $J_{2/3}$, si ha

$$\begin{aligned} J_\alpha &= -\frac{\pi e^{-i\pi\alpha}}{\text{sen}(\pi\alpha)} \sum_{j=0}^3 \text{Res} \left[\frac{z^\alpha}{z^4+1}, e^{(2j+1)i\pi/4} \right] = -\frac{\pi e^{-i\pi\alpha}}{\text{sen}(\pi\alpha)} \frac{1}{4} \sum_{j=0}^3 \left(-\left(e^{(2j+1)i\pi/4} \right)^{\alpha+1} \right) \\ &= \frac{\pi e^{i\pi(1-3\alpha)/4}}{4 \text{sen}(\pi\alpha)} \sum_{j=0}^3 \left(e^{i\pi(\alpha+1)/2} \right)^j = \frac{\pi e^{i\pi(1-3\alpha)/4}}{4 \text{sen}(\pi\alpha)} \frac{1 - e^{2i\pi(\alpha+1)}}{1 - e^{i\pi(\alpha+1)/2}} = \frac{\pi e^{i\pi(1-3\alpha)/4+3i\pi(\alpha+1)/4}}{4 \text{sen}(\pi\alpha)} \frac{\text{sen}(\pi(\alpha+1))}{\text{sen}(\pi(\alpha+1)/4)} \\ &= \frac{-\pi}{4 \text{sen}(\pi\alpha)} \frac{-\text{sen}(\pi\alpha)}{\text{sen}(\pi(\alpha+1)/4)} = \frac{\pi}{4 \text{sen}(\pi(\alpha+1)/4)} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4(\text{sen}(\pi\alpha/4) + \cos(\pi\alpha/4))} \end{aligned}$$

Con $\alpha = 2/3$,

$$J_{2/3} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4(\sin(\pi/6) + \cos(\pi/6))} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4(1/2 + \sqrt{3}/2)} = \frac{\pi}{\sqrt{2} + \sqrt{6}},$$

con $\alpha = 1/3$, usiamo

$$J_\alpha = \frac{\pi}{4\sin(\pi(\alpha + 1)/4)},$$

quindi

$$J_{1/3} = \frac{\pi}{4\sin(\pi/3)} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

Sommando i quattro contributi si ottiene il risultato finale

$$\begin{aligned} \boxed{\odot} &= J_1 + 3J_{2/3} + 3J_{1/3} + J_0 = \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{\sqrt{2} + \sqrt{6}} + \frac{3\pi}{2\sqrt{3}} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \\ &= \pi \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2}) + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} \right) = \frac{\pi}{4} (1 + 3(\sqrt{6} - \sqrt{2}) + 2\sqrt{3} + \sqrt{2}), \end{aligned}$$

da cui

$$\boxed{\odot} = \frac{\pi}{4} (1 - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 3\sqrt{6}).$$

TERZO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si calcolino i coefficienti della parte principale della serie di Laurent della funzione

$$\boxed{\odot}(z) = \frac{z^3 + 1}{z^2 \sin(z^2 \pi)},$$

con centro in $c = 1$ e convergente in $z_p = 1/2$.

Curiosità. Il simbolo $\boxed{\odot}$, che indica la funzione, è quello dalla presa di tipo I, usata in Australia, a Papua Nuova Guinea e in Argentina.

SOLUZIONE DEL TERZO PROBLEMA

La funzione $\boxed{\odot}(z)$ è meromorfa, l'insieme dei suoi poli è $P = \{z_k^+ = \sqrt{k}\}_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \cup \{z_k^- = -\sqrt{k}\}_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0,1\}} \cup \{z_0 = 0\}$. Il polo nell'origine è di ordine 4, infatti

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \boxed{\odot}(z) z^4 = \frac{1}{\pi}.$$

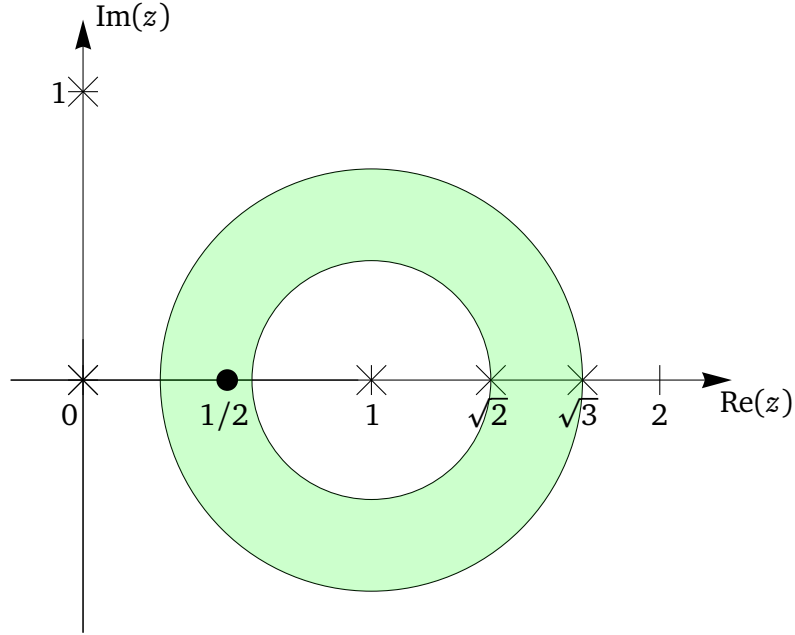
Gli altri poli sono semplici, infatti

$$\lim_{z \rightarrow z_k^\pm} \boxed{\odot}(z) (z - z_k^\pm) = (-1)^k \frac{(z_k^\pm)^3 + 1}{2\pi (z_k^\pm)^3} = (-1)^k \frac{k^{3/2} \pm 1}{2\pi k^{3/2}} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad \forall k : z_k^\pm \in P.$$

Il punto $z = -1$ è regolare, ovvero è una singolarità eliminabile, infatti, il limite è finito e vale

$$\lim_{z \rightarrow -1} \boxed{\odot}(z) = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{1}{(-1)^2} \frac{3z^2}{2\pi z \cos(z^2 \pi)} = \frac{3}{2\pi}.$$

La serie di Laurent richiesta è quella centrata nel polo semplice $c = z_1^+ = 1$ e convergente in $z_p = 1/2$. Per definire la corona circolare di convergenza, osserviamo che i poli più vicini al centro, $z_1^+ = 1$, sono: $z_2^+ = \sqrt{2}$ e $z_3^+ = \sqrt{3}$. Le loro



distanze dal centro sono: $|z_2^+ - z_1^+| = \sqrt{2} - 1 \simeq 0,41$ e $|z_3^+ - z_1^+| = \sqrt{3} - 1 \simeq 0,73$, e sono, rispettivamente, minore e maggiore della distanza dallo stesso centro del punto di convergenza richiesto, che è $|z_p - z_1^+| = 1/2$, ovvero

$$|z_2^+ - z_1^+| < |z_p - z_1^+| < |z_3^+ - z_1^+|.$$

La corona di convergenza è

$$C = \{z : \sqrt{2} - 1 < |z - 1| < \sqrt{3} - 1\},$$

è rappresentata dall'area verde nella figura soprastante, dove i simboli $\times$ indicano i poli e il disco nero indica, invece, il punto in cui si richiede la convergenza.

La formula integrale dei coefficienti della parte principale della serie di Laurent, oggetto del problema, è

$$C_k = \frac{1}{2i\pi} \oint_{|z-1|=r} \frac{z^3 + 1}{z^2 \sin(z^2 \pi) (z - 1)^{k+1}} dz, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \cap (-\infty, 0],$$

dove il percorso d'integrazione è una circonferenza centrata in $z = 1$ e contenuta nella corona C , quindi, con raggio r tale che: $\sqrt{2} - 1 < r < \sqrt{3} - 1$. Questa circonferenza avvolge due singolarità della funzione integranda: $z_1^+ = 1$ e $z_2^+ = \sqrt{2}$. Quindi, in generale, usando il teorema dei residui, si ha

$$C_k = \text{Res} \left[\frac{z^3 + 1}{z^2 \sin(z^2 \pi) (z - 1)^{k+1}}, 1 \right] + \text{Res} \left[\frac{z^3 + 1}{z^2 \sin(z^2 \pi) (z - 1)^{k+1}}, \sqrt{2} \right], \quad \forall k \in \mathbb{Z} \cap (-\infty, 0].$$

Il punto $z_1^+ = 1$ rappresenta un polo per la funzione integranda solo per $k = 0$ e $k = -1$, infatti, a partire da $k = -2$, il polinomio $(z - 1)^{k+1}$, cancella lo zero della funzione seno, facendo sì che lo stesso punto diventi una singolarità eliminabile. In particolare, per il primo residuo si ha

$$\text{Res} \left[\frac{z^3 + 1}{z^2 \sin(z^2 \pi) (z - 1)^{k+1}}, 1 \right] = \begin{cases} \text{Res} \left[\frac{z^3 + 1}{z^2 \sin(z^2 \pi) (z - 1)}, 1 \right] = \frac{1}{\pi} & k = 0 \\ \text{Res} \left[\frac{z^3 + 1}{z^2 \sin(z^2 \pi)}, 1 \right] = -\frac{1}{\pi} & k = -1 \\ 0 & k \in \mathbb{Z} \cap (-\infty, -2] \end{cases}.$$

La singolarità in $z_2^+ = \sqrt{2}$, invece, non cambia la sua natura al variare dell'indice $k \in \mathbb{Z}$, rimanendo una polo semplice per la funzione integranda. Ne consegue che il secondo residuo vale

$$\text{Res} \left[\frac{z^3 + 1}{z^2 \text{sen}(z^2 \pi) (z - 1)^{k+1}}, \sqrt{2} \right] = \lim_{z \rightarrow \sqrt{2}} \frac{z^3 + 1}{z^2 \text{sen}(z^2 \pi) (z - 1)^{k+1}} (z - \sqrt{2}) = \frac{2\sqrt{2} + 1}{4\sqrt{2}\pi (\sqrt{2} - 1)^{k+1}}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Calcoliamo esplicitamente i residui in z_2^+ per $k = 0$ e $k = -1$, che sono rispettivamente,

$$\begin{aligned} k = 0: \quad \text{Res} \left[\frac{z^3 + 1}{z^2 \text{sen}(z^2 \pi) (z - 1)}, \sqrt{2} \right] &= \frac{2\sqrt{2} + 1}{4\sqrt{2}\pi (\sqrt{2} - 1)} = \frac{6 + 5\sqrt{2}}{8\pi}, \\ k = -1: \quad \text{Res} \left[\frac{z^3 + 1}{z^2 \text{sen}(z^2 \pi)}, \sqrt{2} \right] &= \frac{2\sqrt{2} + 1}{4\sqrt{2}\pi} = \frac{4 + \sqrt{2}}{8\pi}. \end{aligned}$$

I coefficienti richiesti sono

$$C_k = \frac{1}{8\pi} \begin{cases} 14 + 5\sqrt{2} & k = 0 \\ -4 + \sqrt{2} & k = -1 \\ (4 + \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1)^{-k-1} & k \in \mathbb{Z} \cap (-\infty, -2] \end{cases}.$$

QUARTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si dimostri che, per ogni operatore diagonalizzabile e invertibile $\hat{A}$, definito in uno spazio di Hilbert H_N a N dimensioni, esiste l'insieme di operatori $\{\hat{B}_k\}_{k=1}^N$, tali che

$$\hat{A}\hat{B}_k = \hat{B}_k\hat{A} = \alpha_k \hat{B}_k, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, N\},$$

dove $\{\alpha_k\}_{k=1}^N$ è l'insieme degli autovalori dell'operatore $\hat{A}$. Si dimostri, inoltre, che

$$\sum_{k=1}^N \alpha_k^{-1} \hat{B}_k \hat{A} = \hat{I},$$

dove $\hat{I}$ è l'operatore identità.

Si ottengano le rappresentazioni matriciali, rispetto alla base ortonormale $\{|e\rangle_k\}_{k=1}^3$, degli operatori dell'insieme $\{\hat{B}_k\}_{k=1}^3$, definiti nello spazio di Hilbert a tre dimensioni H_3 , nel caso dell'operatore $\hat{A}$, che, rispetto alla stessa base, è rappresentato dalla matrice

$$\hat{A} \xleftrightarrow{e} A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

SOLUZIONE DEL QUARTO PROBLEMA

Per ogni operatore diagonalizzabile, come conseguenza del teorema spettrale, esiste un insieme di proiettori ortogonali $\{\hat{B}_k\}_{k=1}^N$, la cui somma dà l'operatore identità (la cosiddetta condizione di "copertura di tutto lo spazio") e tali che vale la rappresentazione spettrale

$$\hat{A} = \sum_{k=1}^N \alpha_k \hat{B}_k,$$

dove l'insieme dei coefficienti $\{\alpha_k\}_{k=1}^N$ è quello degli autovalori, ovvero lo spettro discreto dell'operatore $\hat{A}$. Se moltiplichiamo da sinistra ambo i membri di questa identità operatoriale per un generico proiettore $\hat{B}_j$, con $j \in$

$\{1, 2, \dots, N\}$, si ha

$$\hat{B}_j \hat{A} = \sum_{k=1}^N \alpha_k \underbrace{\hat{B}_j \hat{B}_k}_{=\delta_{jk} \hat{B}_j^2 = \delta_{jk} \hat{B}_j} = \alpha_j \hat{B}_j.$$

Moltiplicando da destra

$$\hat{A} \hat{B}_j = \sum_{k=1}^N \alpha_k \underbrace{\hat{B}_k \hat{B}_j}_{=\delta_{kj} \hat{B}_j^2 = \delta_{kj} \hat{B}_j} = \alpha_j \hat{B}_j.$$

Abbiamo dimostrato l'esistenza dell'insieme di operatori $\{\hat{B}_k\}_{k=1}^N$, operatori che verificano l'identità data nella prima equazione del problema.

La seconda identità si ottiene dalla condizione di “copertura di tutto lo spazio” dei proiettori ortogonali. Infatti, usando l'identità $\hat{B}_k \hat{A} = \alpha_k \hat{B}_k$, valida per ogni $k \in \{1, 2, \dots, N\}$, si ha che

$$\sum_{k=1}^N \alpha_k^{-1} \hat{B}_k \hat{A} = \sum_{k=1}^N \alpha_k^{-1} \alpha_k \hat{B}_k = \sum_{k=1}^N \hat{B}_k = \hat{I}$$

Consideriamo il caso particolare dell'operatore $\hat{A}$ nello spazio di Hilbert tridimensionale, di cui è data la rappresentazione matriciale rispetto alla base ortonormale $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^3 \subset H_3$. Gli autovalori sono le soluzioni dell'equazione secolare

$$\begin{aligned} \det(A - \alpha I) &= 0 \\ \begin{pmatrix} 2 - \alpha & 0 & 0 \\ 1 & 4 - \alpha & -1 \\ -2 & -4 & 4 - \alpha \end{pmatrix} &= 0 \\ (2 - \alpha)((4 - \alpha)^2 - 4) &= 0, \end{aligned}$$

la soluzioni sono:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 2, \quad \alpha_3 = 6,$$

l'autovalore $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$ è degenere con ordine di degenerazione 2, mentre $\alpha_3 = 6$ è non degenere. Indichiamo con v_k , il vettore che rappresenta, rispetto alla base data, il k -esimo autovettore, con $k = 1, 2, 3$. Si hanno cioè le equazioni agli autovalori matriciali

$$A v_k = \alpha_k v_k, \quad k = 1, 2, 3,$$

da cui si ottengono i due sistemi omogenei le cui soluzioni sono le componenti contro-varianti dei vettori v_k , con $k = 1, 2, 3$. Si hanno

$$\begin{pmatrix} 2 - \alpha_k & 0 & 0 \\ 1 & 4 - \alpha_k & -1 \\ -2 & -4 & 4 - \alpha_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_k^1 \\ v_k^2 \\ v_k^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dove v_k^j è la j -esima componente contro-variante del k -esimo vettore con: $k, j \in \{1, 2, 3\}$. Consideriamo il primo autovalore $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1,2}^1 \\ v_{1,2}^2 \\ v_{1,2}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

poniamo $v_{1,2}^1 = v$, dalla seconda riga si ha la sola condizione

$$v_{1,2}^3 = v + 2v_{1,2}^2,$$

scegliendo, per i due casi, $v_1^2 = 0$ e $v_2^2 = -v/2$,

$$v_1^3 = v, \quad v_2^3 = 0,$$

da cui, normalizzando,

$$v_1 = v \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = v \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dove abbiamo scelto $v = 1/\sqrt{2}$ e $v = 2/\sqrt{5}$, rispettivamente per v_1 e v_2 .

Per il terzo autovettore, corrispondente all'autovalore $\alpha_3 = 6$, si ha

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_3^1 \\ v_3^2 \\ v_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dalla prima riga si ha: $v_3^1 = 0$, dalla seconda: $v_3^3 = -2v_3^2$, quindi, normalizzando,

$$v_3 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

I tre autovettori sono linearmente indipendenti, infatti la matrice che ha per colonne gli stessi autovettori, anche non normalizzati, per semplicità, ha rango 3, come si evince dal determinante non nullo,

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 4.$$

L'operatore $\hat{A}$ è diagonalizzabile e si può fare la rappresentazione spettrale

$$\hat{A} = \sum_{k=1}^3 \alpha_k \hat{B}_k,$$

dove $\{\hat{B}_k\}_{k=1}^3$ è l'insieme dei tre proiettori ortogonali caratteristici dell'operatore $\hat{A}$ che inoltre verificano la condizione di copertura di tutto lo spazio,

$$\sum_{k=1}^3 \hat{B}_k = \hat{I}.$$

La matrice diagonalizzante D dell'operatore $\hat{A}$ si ottiene allineando nelle tre colonne i tre autovettori, poiché l'operatore non è hermitiano, la matrice non è unitaria, quindi non è necessario usare i vettori normalizzati, si ha

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

È invertibile, con

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/4 & -1/2 & -1/4 \\ 1/4 & 1/2 & -1/4 \end{pmatrix}$$

e si ha

$$A_d = D^{-1}AD = \text{diag}(2, 2, 6).$$

La rappresentazione diagonale della rappresentazione spettrale è

$$A_d = D^{-1} \sum_{k=1}^3 \alpha_k B_k D = \sum_{k=1}^3 \alpha_k (P_k)_d ,$$

dove P_k e $(B_k)_d$ sono le matrici che rappresentano l'operatore $\hat{B}_k$ rispetto alla base ortonormale data e quella degli autovettori, che è quindi diagonale, cioè $\hat{B}_k \xleftrightarrow{e,v} B_k$, $(B_k)_d$, con $k = 1, 2, 3$. Le matrici $(B_k)_d$ sono diagonali e hanno solo il k -esimo elemento diagonale non nullo e uguale all'unità, cioè

$$(B_1)_d = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (B_2)_d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (B_3)_d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La rappresentazioni non diagonali si ottengono come

$$B_k = D (B_k)_d D^{-1},$$

si hanno, quindi

$$\begin{aligned} B_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/4 & -1/2 & -1/4 \\ 1/4 & 1/2 & -1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}, \\ B_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/4 & -1/2 & -1/4 \\ 1/4 & 1/2 & -1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 & -1/2 \\ -1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ B_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/4 & -1/2 & -1/4 \\ 1/4 & 1/2 & -1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & -1/4 \\ -1/2 & -1 & 1/2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

QUINTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 5/30)

Avvalendosi dei teoremi sulle trasformate di Fourier, si calcoli l'integrale

$$\boxed{\text{☺}} = \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} dv \int_{-\infty}^{\infty} dw e^{-u^2 - v^2 - w^2 - w(u+v)}.$$

Curiosità. Il simbolo , che indica l'integrale, è quello dalla presa di tipo K, usata in Danimarca e in Groenlandia.

SOLUZIONE DEL QUINTO PROBLEMA

La quantità richiesta può essere scritta come prodotto di due convoluzioni

$$\begin{aligned} \boxed{\text{☺}} &= \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} dv \int_{-\infty}^{\infty} dw e^{-(u-w)^2/2 - u^2/2 - (v-w)^2/2 - v^2/2} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} dv \int_{-\infty}^{\infty} dw e^{-(u-w)^2/2} e^{-u^2/2} e^{-(v-w)^2/2} e^{-v^2/2} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dw \int_{-\infty}^{\infty} du e^{-(u-w)^2/2} e^{-u^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} dv e^{-(v-w)^2/2} e^{-v^2/2} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (g * g)(w) (g * g)(w) dw \\ &= ((g * g), (g * g)) \\ &= \|(g * g)\|^2, \end{aligned}$$

dove $g(x)$ è la funzione gaussiana

$$g(x) = e^{-x^2/2}.$$

Usando l'equazione di Parseval, per cui la norma di una funzione a quadrato sommabile in $\mathbb{R}$, coincide con quella della sua trasformata di Fourier, si ha

$$\|(g * g)\|^2 = \|\mathcal{F}_k[(g * g)]\|^2.$$

Poiché la trasformata di Fourier della convoluzione è il prodotto delle trasformate di Fourier moltiplicato per $\sqrt{2\pi}$, ovvero

$$\mathcal{F}_k[(g * g)] = \sqrt{2\pi} (\mathcal{F}_k[g])^2,$$

con

$$\mathcal{F}_k[g] = e^{-k^2/2},$$

si ha

$$\begin{aligned} \|(g * g)\|^2 &= \|\mathcal{F}_k[(g * g)]\|^2 = 2\pi (\mathcal{F}_k[g])^2 (\mathcal{F}_k[g])^2 \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{F}_k[g])^4 dk = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2k^2} dk = \sqrt{2\pi} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2k^2} \sqrt{2} dk}_{=\sqrt{\pi}} \\ \|(g * g)\|^2 &= \sqrt{2\pi}^{3/2}, \end{aligned}$$

che rappresenta il risultato finale, cioè

$$\boxed{\text{smiley}} = \sqrt{2\pi}^{3/2}.$$

SESTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 5/30)

Facendo un uso dell'algebra delle matrici di Pauli si calcolino l'espressione e lo spettro discreto della matrice

$$\boxed{\text{smiley}} = \exp \left[\begin{pmatrix} 3i & 1 \\ -1 & 5i \end{pmatrix} \right].$$

Curiosità. Il simbolo $\boxed{\text{smiley}}$, che indica la matrice, è quello dalla presa di tipo I, usata in Australia, in Papua Nuova Guinea e in Argentina.

SOLUZIONE DEL SESTO PROBLEMA

Riscriviamo la matrice ad esponente come combinazione delle matrici di Pauli $\{\sigma_j\}_{j=1}^3$ e della matrice identità 2×2 , I , si ha

$$\boxed{\text{smiley}} = \exp [i(4I + \sigma_2 - \sigma_3)] = \exp(4iI) \exp(i\vec{a} \cdot \vec{\sigma}),$$

dove: $\vec{\sigma}$ è il vettore delle matrici di Pauli e $\vec{a} = (0, 1, -1)$ è un tri-vettore reale, cioè $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$. Per il secondo esponenziale usiamo la formula nota

$$\begin{aligned} e^{i\vec{a} \cdot \vec{\sigma}} &= I \cos(|\vec{a}|) + i \frac{\vec{a} \cdot \vec{\sigma}}{|\vec{a}|} \sin(|\vec{a}|) = I \cos(\sqrt{2}) + i \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}) \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{2}) - i \sin(\sqrt{2})/\sqrt{2} & \sin(\sqrt{2})/\sqrt{2} \\ -\sin(\sqrt{2})/\sqrt{2} & \cos(\sqrt{2}) + i \sin(\sqrt{2})/\sqrt{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Usando

$$\exp(4iI) = e^{4i}I,$$

si ha il risultato finale

$$U = e^{4i} \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{2}) - i \sin(\sqrt{2})/\sqrt{2} & \sin(\sqrt{2})/\sqrt{2} \\ -\sin(\sqrt{2})/\sqrt{2} & \cos(\sqrt{2}) + i \sin(\sqrt{2})/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Lo spettro discreto, ovvero gli autovalori della matrice U possono essere ottenuti da quelli della matrice ad esponente. Infatti, la rappresentazione diagonale della matrice U ha come elementi diagonali gli esponenziali degli elementi diagonali omologhi della matrice ad esponente. Gli autovalori di questa matrice sono le soluzioni dell'equazione nella variabile x

$$\det \begin{pmatrix} 3i - x & 1 \\ -1 & 5i - x \end{pmatrix} = 0$$

$$x^2 - 8ix - 14 = 0,$$

sono $x_{1,2} = i(4 \pm \sqrt{2})$. Ne consegue che lo spettro discreto della matrice U è

$$\sigma_d(U) = \{e^{i(4+\sqrt{2})}, e^{i(4-\sqrt{2})}\}.$$