

# METODI MATEMATICI PER LA FISICA

QUARTO APPELLO ESTIVO - 10 SETTEMBRE 2024

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che il punteggio assegnato a ciascuna procedura di risoluzione può variare tra lo zero e il massimo indicato ed è stabilito valutando:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo;
6. la bellezza e l'armonia del tutto.

## PRIMO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$\mathbb{C} = \oint_{|z|=1} z^{-100i} dz,$$

dove il percorso d'integrazione è orientato in verso positivo e la rappresentazione principale è  $\arg(z) \in [-\pi, \pi]$ .

**Curiosità.** Il simbolo  $\mathbb{C}$  è il logo della metropolitana di Pechino capitale della Repubblica Popolare Cinese.

## SOLUZIONE DEL PRIMO PROBLEMA

Parametizziamo la circonferenza usando la rappresentazione principale indicata, quindi i valori di  $z$  ad essa appartenenti sono

$$z(\theta) = e^{i\theta}, \quad \theta \in [-\pi, \pi].$$

L'integrale può essere scritto come

$$\mathbb{C} = \int_{-\pi}^{\pi} (e^{i\theta})^{-100i} i e^{i\theta} d\theta, = i \int_{-\pi}^{\pi} e^{\theta(100+i)} d\theta.$$

Integriamo à la Riemann

$$\mathbb{C} = i \frac{e^{\theta(100+i)}}{100+i} \Big|_{-\pi}^{\pi} = i \frac{-e^{100\pi} + e^{-100\pi}}{100+i},$$

da cui

$$\mathbb{C} = -2 \frac{1+100i}{10001} \sinh(100\pi).$$

## SECONDO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si determini la funzione meromorfa  $f(z)$  che ha poli semplici nei punti dell'insieme  $\{z_k = ik\}_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}$ , residui

$$\text{Res}[f(z), z_k] = -\frac{i}{2k^3}, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

e comportamento asintotico

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0.$$

## SOLUZIONE DEL SECONDO PROBLEMA

Abbiamo tutte le informazioni per scrivere l'espansione di Mittag-Leffler della funzione

$$f(z) = \phi(z) + \sum_{k \neq 0} \frac{\text{Res}[f(z), z_k]}{z - z_k} = \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{-i}{2k^3} \frac{1}{z - ik} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-i}{2k^3} \frac{1}{z - ik},$$

dove abbiamo usato i valori noti dei poli, dei residui e imposto che la parte intera della funzione,  $\phi(z)$ , sia nulla come conseguenza del limite

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \phi(z) = 0.$$

Con il cambiamento di indice  $k' = -k$  nella prima serie si ha

$$f(z) = - \sum_{k'=1}^{\infty} \frac{-i}{2k'^3} \frac{1}{z + ik'} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-i}{2k^3} \frac{1}{z - ik} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-i}{2k^3} \left( \frac{1}{z - ik} - \frac{1}{z + ik} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \frac{1}{z^2 + k^2}.$$

Possiamo sommare la serie usando il metodo dei residui, definiamo la funzione  $g(w)$  in modo tale che

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} g(k), \quad g(w) = \frac{1}{w^2} \frac{1}{z^2 + w^2}.$$

Poiché la serie è a segno costante, usiamo la funzione

$$G(w) = \pi g(w) \frac{\cos(\pi w)}{\text{sen}(\pi w)},$$

che, per  $z \neq 0$ , ha i poli semplici  $\{-iz, iz\} \cup \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  e il polo triplo nell'origine dovuto, e studiamo il limite dell'integrale

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2i\pi} \oint_{|w|=2n+1/2} G(w) dw &= \text{Res}[G(w), 0] + \text{Res}[G(w), -iz] + \text{Res}[G(w), iz] \\ &+ \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left( \sum_{j=-n}^{-1} \text{Res}[G(w), j] + \sum_{j=1}^n \text{Res}[G(w), j] \right)}_{\text{poli semplici in } \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \end{aligned}$$

Calcoliamo il residuo nel polo semplice  $j$ , con  $j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ,

$$\text{Res}[G(w), j] = \lim_{w \rightarrow j} \pi \frac{1}{w^2} \frac{1}{z^2 + w^2} \frac{\cos(\pi w)}{\text{sen}(\pi w)} (w - j) = \frac{1}{j^2} \frac{1}{z^2 + j^2}.$$

Il residuo nell'origine coincide con il coefficiente  $-1$  della serie di Laurent della funzione integranda centrata nell'origine e lo si può calcolare sfruttando le serie di Taylor note delle funzioni trigonometriche e la somma della serie geometrica. Nel limite  $w \rightarrow 0$ , si ha

$$\begin{aligned} \pi \frac{1}{w^2} \frac{1}{z^2 + w^2} \frac{\cos(\pi w)}{\text{sen}(\pi w)} &= \frac{\pi}{z^2} \frac{1}{w^2} \frac{1}{1 + w^2/z^2} \left( 1 - \frac{\pi^2 w^2}{2!} + \frac{\pi^4 w^4}{4!} + \mathcal{O}(w^6) \right) \left( \pi w - \frac{\pi^3 w^3}{3!} + \frac{\pi^5 w^5}{5!} + \mathcal{O}(w^7) \right)^{-1} \\ &= \frac{1}{z^2} \frac{1}{w^3} \left( 1 - \frac{w^2}{z^2} + \frac{w^4}{z^4} + \mathcal{O}(z^6) \right) \left( 1 - \frac{\pi^2 w^2}{2!} + \frac{\pi^4 w^4}{4!} + \mathcal{O}(w^6) \right) \\ &\quad \left( 1 - \frac{\pi^2 w^2}{3!} + \frac{\pi^4 w^4}{5!} + \mathcal{O}(w^6) \right)^{-1} \\ &= \frac{1}{z^2} \frac{1}{w^3} \left( 1 - \frac{w^2}{z^2} + \frac{w^4}{z^4} + \mathcal{O}(z^6) \right) \left( 1 - \frac{\pi^2 w^2}{2!} + \frac{\pi^4 w^4}{4!} + \mathcal{O}(w^6) \right) \\ &\quad \left[ 1 + \left( \frac{\pi^2 w^2}{3!} - \frac{\pi^4 w^4}{5!} + \mathcal{O}(w^6) \right) + \left( \frac{\pi^2 w^2}{3!} - \frac{\pi^4 w^4}{5!} + \mathcal{O}(w^6) \right)^2 + \dots \right]. \end{aligned}$$

Per ottenere il coefficiente della potenza  $w^{-1}$  è necessario considerare tutti i contributi di ordine tre, ovvero proporzionali a  $w^2$  del prodotto delle espressioni delle prime due parentesi tonde e della quadra. È immediato osservare,

poiché nei tre casi si ha il primo termine costante e il secondo di ordine due, i tre possibili contributi si ottengono dal prodotto di due termini costanti e uno di ordine due, cioè

$$\pi \frac{1}{w^2} \frac{1}{z^2 + w^2} \frac{\cos(\pi w)}{\sin(\pi w)} = \dots + \frac{1}{w} \frac{1}{z^2} \left( -\frac{1}{z^2} - \frac{\pi^2}{2!} + \frac{\pi^2}{3!} \right) + \dots = \dots + \frac{1}{w} \left( -\frac{1}{z^4} - \frac{\pi^2}{3z^2} \right) + \dots$$

Ne consegue che il residuo nell'origine vale

$$\text{Res}[G(w), 0] = -\frac{1}{z^4} - \frac{\pi^2}{3z^2}.$$

Infine, i residui nei poli semplici  $w = \pm iz$ , con  $z \neq 0$ , sono

$$\begin{aligned} \text{Res}[G(w), \pm iz] &= \lim_{w \rightarrow \pm iz} \pi \frac{1}{w^2} \frac{1}{z^2 + w^2} \frac{\cos(\pi w)}{\sin(\pi w)} (w \mp iz) = \lim_{w \rightarrow \pm iz} \frac{\pi}{2w^3} \frac{\cos(\pi w)}{\sin(\pi w)} = \frac{\pi}{\mp 2iz^3} \frac{\cosh(\pi z)}{\pm i \sinh(\pi z)} \\ &= \frac{\pi}{2z^3} \frac{\cosh(\pi z)}{\sinh(\pi z)} \\ &= \frac{\pi}{2z^3} \coth(\pi z). \end{aligned}$$

Poiché il limite dell'integrale è nullo, come si può dimostrare facilmente usando la disuguaglianza di Darboux, cioè

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2i\pi} \oint_{|w|=n+1/2} G(w) dw = 0,$$

si ottiene

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=-\infty}^{-1} \frac{1}{j^2} \frac{1}{z^2 + j^2} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \frac{1}{z^2 + j^2} - \frac{1}{z^4} - \frac{\pi^2}{3z^2} - \frac{\pi}{2z^3} \coth(\pi z) + \frac{\pi}{2z^3} \coth(\pi z) \\ 0 &= 2 \underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \frac{1}{z^2 + j^2}}_{=f(z)} - \frac{1}{z^4} - \frac{\pi^2}{3z^2} + \frac{\pi}{z^3} \coth(\pi z), \end{aligned}$$

risolvendo per la funzione  $f(z)$  cercata

$$f(z) = \frac{1}{2z^4} + \frac{\pi^2}{6z^4} - \frac{\pi}{2z^3} \coth(\pi z).$$

### TERZO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Sapendo che è strettamente positivo, si calcoli il valore numerico dell'integrale in valore principale

$$\text{Ⓜ} = \text{Pr} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{1-4x^2} dx.$$

**Curiosità.** Il simbolo  è il logo della metropolitana di Shanghai, la sua area metropolitana è la più popolosa della Repubblica Popolare Cinese e si trova nella parte orientale del paese.

### SOLUZIONE DEL TERZO PROBLEMA

Calcoliamo l'integrale usando l'integrazione nel piano complesso. La funzione integranda è polidroma e ha punti di diramazione al finito in  $d_{\pm} = \pm 1$ , coincidenti con gli zeri del polinomio di secondo grado che compare sotto la radice. Ha, inoltre, due poli semplici in  $p_{\pm} = \pm 1/2$ , a loro volta, zeri del polinomio di secondo grado che ne costituisce il denominatore. È rispetto a questi due poli che va considerato il valore principale.

Il polinomio di secondo grado argomento della radice quadrata può essere fattorizzato come

$$1 - z^2 = (1 - z)(1 + z),$$

definiamo le fasi dei fattori in modo da avere la discontinuità nel segmento reale  $[-1, 1]$ . A tal fine definiamo i tagli in avanti, scegliendo

$$\begin{aligned} 1-z &= |1-z|e^{i\theta_+}, & \theta_+ &\in (-\pi, \pi), \\ 1+z &= |1+z|e^{i\theta_-}, & \theta_- &\in (2, 2\pi), \end{aligned}$$

cosicché sul bordo superiore di  $[-1, 1]$  si hanno le fasi

$$(\theta_-, \theta_+) \rightarrow (0^+, 0^-),$$

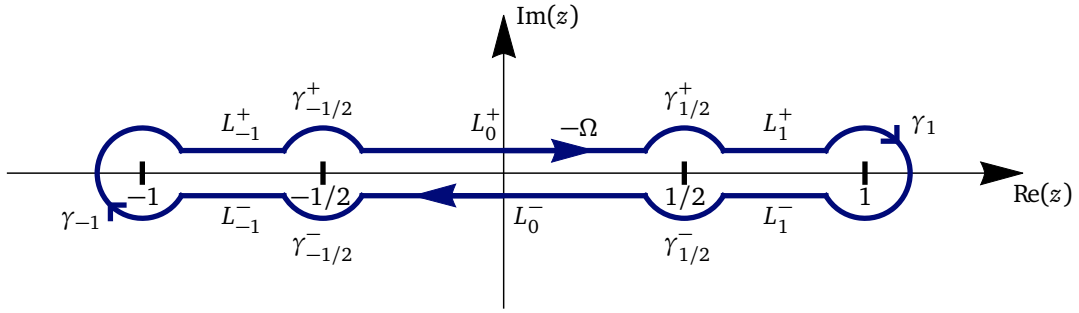
mentre sul bordo inferiore

$$(\theta_-, \theta_+) \rightarrow (2\pi^-, 0^+).$$

Consideriamo il percorso chiuso  $-\Omega$ , il segno meno indica il verso di percorrenza orario, mostrato in figura, dato dall'unione di sei archi e sei tratti rettilinei, usando i simboli indicati in figura, si ha

$$-\Omega = (-\gamma_{-1}) \cup L_{-1}^+ \cup (-\gamma_{-1/2}^+) \cup L_0^+ \cup (-\gamma_{1/2}^+) \cup \gamma_1 \cup L_1^- \cup (-\gamma_{1/2}^-) \cup L_0^- \cup (-\gamma_{-1/2}^-) \cup L_{-1}^-,$$

dove l'ordine della sequenza riproduce quello della adiacenze, con il primo arco  $\gamma_{-1}$  adiacente a  $L_{-1}^-$ . Gli archi sono indicati con il simbolo  $\gamma_\beta^\alpha$ , con pedici  $\beta = \pm 1, \pm 1/2$  e apici  $\alpha = \pm$  o assenti, sono centrati in  $z = \beta$  hanno raggio  $\epsilon$  infinitesimo e sono tutti orientati in senso antiorario, quindi positivo.



La funzione integranda non ha singolarità al finito avvolte dal percorso chiuso  $-\Omega$ , quindi esterne ad esso, usando il teorema di residui si ha

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \oint_{-\Omega} \frac{\sqrt{1-z^2}}{1-4z^2} dz = 2i\pi \operatorname{Res} \left[ \frac{\sqrt{1-z^2}}{1-4z^2}, \infty \right] = -2i\pi \operatorname{Res} \left[ \frac{\sqrt{1-1/w^2}}{w^2(1-4/w^2)}, 0 \right].$$

Scriviamo il limite dell'integrale come somma dei contributi relativi agli archi e ai tratti rettilinei che costituiscono il percorso  $-\Omega$ . Osserviamo che, come conseguenza della scelta della fasi  $\theta_\pm$ , la parte polidroma della funzione integranda sui tratti rettilinei assume i valori

$$\sqrt{1-z^2} = \sqrt{|1-z^2|} e^{i(\theta_- + \theta_+)/2} = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} e^{i(0+0)/2} = \sqrt{1-x^2} & z \in L_{-1}^+ \cup L_0^+ \cup L_1^+ \\ \sqrt{1-x^2} e^{i(2\pi+0)/2} = -\sqrt{1-x^2} & z \in L_{-1}^- \cup L_0^- \cup L_1^- \end{cases}.$$

Ne consegue che

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \oint_{-\Omega} \frac{\sqrt{1-z^2}}{1-4z^2} dz &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left( \int_{L_{-1}^+ \cup L_0^+ \cup L_1^+} \frac{\sqrt{1-x^2}}{1-4x^2} dx - \int_{L_{-1}^- \cup L_0^- \cup L_1^-} \frac{\sqrt{1-x^2}}{1-4x^2} dx \right) \\ &+ \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left( - \int_{\gamma_{-1}} \frac{\sqrt{1-z^2}}{1-4z^2} dz - \int_{\gamma_1} \frac{\sqrt{1-z^2}}{1-4z^2} dz \right) \\ &+ \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left( - \int_{\gamma_{-1/2}^+} \frac{\sqrt{1-z^2}}{1-4z^2} dz - \int_{\gamma_{1/2}^+} \frac{\sqrt{1-z^2}}{1-4z^2} dz - \int_{\gamma_{-1/2}^-} \frac{\sqrt{1-z^2}}{1-4z^2} dz - \int_{\gamma_{1/2}^-} \frac{\sqrt{1-z^2}}{1-4z^2} dz \right), \end{aligned}$$

il limite del primo integrale è quello cercato, cioè  $\ominus$ , quello del secondo è il suo opposto, tenendo conto del verso di percorrenza dei tratti rettilinei  $L_{-1}^-$ ,  $L_0^-$  e  $L_1^-$ ; i limiti del terzo e quarto sono nulli, come si evince dai lemmi di integrazione sugli archi, quindi

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \oint_{-\Omega} \frac{\sqrt{1-z^2}}{1-4z^2} dz = 2\ominus - \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left( \int_{\gamma_{-1/2}^+} \frac{\sqrt{1-z^2}}{1-4z^2} dz + \int_{\gamma_{1/2}^+} \frac{\sqrt{1-z^2}}{1-4z^2} dz + \int_{\gamma_{-1/2}^-} \frac{\sqrt{1-z^2}}{1-4z^2} dz + \int_{\gamma_{1/2}^-} \frac{\sqrt{1-z^2}}{1-4z^2} dz \right).$$

Calcoliamo gli integrali sui quattro archi  $\gamma_{\pm 1/2}^\pm$ , con tutte le combinazioni di segni. Consideriamo i due archi nel semipiano della parti immaginarie positive  $\gamma_{\pm 1/2}^+$ , su di essi si hanno  $z = \pm 1/2 + \epsilon e^{i\theta}$ , con  $\theta \in (\epsilon, \pi - \epsilon)$ , quindi

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\gamma_{\pm 1/2}^+} \frac{\sqrt{1-z^2}}{1-4z^2} dz = i\pi \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1-z^2}}{1-4z^2} (z \mp 1/2) = -i\pi \lim_{z \rightarrow \pm 1/2} \frac{\sqrt{1-z^2}}{4(z \pm 1/2)} = \mp \frac{i\pi\sqrt{3}}{8}.$$

Per gli archi  $\gamma_{\pm 1/2}^-$ , appartenenti al semipiano della parti immaginarie negative, si hanno  $z = \pm 1/2 + \epsilon e^{i\theta}$ , con  $\theta \in (\pi + \epsilon, 2\pi - \epsilon)$  e

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\gamma_{\pm 1/2}^-} \frac{\sqrt{1-z^2}}{1-4z^2} dz = i\pi \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1-z^2}}{1-4z^2} (z \mp 1/2) = -i\pi \lim_{z \rightarrow \pm 1/2} \frac{\sqrt{1-z^2}}{4(z \pm 1/2)} = \mp \frac{i\pi\sqrt{3}}{8}.$$

La somma dei quattro contributi, essendo coppie di opposti, è nulla, quindi

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \oint_{-\Omega} \frac{\sqrt{1-z^2}}{1-4z^2} dz = 2\ominus$$

ovvero, usando l'espressione in termini del residuo all'infinito

$$\ominus = \frac{1}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \oint_{-\Omega} \frac{\sqrt{1-z^2}}{1-4z^2} dz = -i\pi \operatorname{Res} \left[ \frac{\sqrt{1-1/w^2}}{w^2(1-4/w^2)}, 0 \right].$$

Osservando che la funzione nella variabile  $w$  ha un polo semplice nell'origine, come si evince riscrivendo la stessa nella forma

$$\frac{\sqrt{1-1/w^2}}{w^2(1-4/w^2)} = \frac{\sqrt{w^2-1}}{w(w^2-4)},$$

si ha il residuo

$$\operatorname{Res} \left[ \frac{\sqrt{w^2-1}}{w(w^2-4)}, 0 \right] = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{\sqrt{w^2-1}}{w^2-4} = \frac{\pm i}{-4} = \mp \frac{i}{4}.$$

L'ambiguità della scelta del segno della radice quadrata di  $-1$  e quindi del valore del residuo, si risolve coerentemente con la definizione delle fasi  $\theta_\pm$ . Ci viene in aiuto, però, il dato del problema che afferma la stretta positività del valore dell'integrale. Solo la scelta  $\sqrt{-1} = -i$  e quindi del valore del residuo pari a  $i/4$ , garantisce un valore strettamente positivo, ovvero

$$\ominus = \frac{\pi}{4},$$

è questo il risultato finale.

#### QUARTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 5/30)

Si dimostri che gli operatori dati dai prodotti non nulli dei tre operatori  $\hat{A}_1$ ,  $\hat{A}_2$  e  $\hat{A}_3$  definiti nello spazio di Hilbert  $X_N$  a  $N$  dimensioni, con  $N \in \mathbb{N}$ , come

$$\hat{P}_{ijk} = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} (\epsilon_{ijk} + 1) \hat{A}_i \hat{A}_j \hat{A}_k, \quad \forall i, j, k \in \{1, 2, 3\},$$

dove  $\epsilon_{ijk}$  è il simbolo di Levi-Civita, hanno lo stesso spettro discreto.

## SOLUZIONE DEL QUARTO PROBLEMA

Dalle proprietà del simbolo di Levi-Civita si evince che gli unici prodotti non nulli sono quelli di tre operatori diversi i cui indici siano ordinati secondo permutazioni positive dei numeri 1, 2 e 3. Infatti il fattore  $\epsilon_{ijk}$  annulla tutti i prodotti in cui compaiano due o tre indici uguali, mentre il fattore  $(\epsilon_{ijk+1})$  annulla le permutazioni negative. Ne consegue che gli operatori da considerare sono i tre

$$\hat{P}_{123} = \hat{A}_1 \hat{A}_2 \hat{A}_3 \quad \hat{P}_{231} = \hat{A}_2 \hat{A}_3 \hat{A}_1 \quad \hat{P}_{312} = \hat{A}_3 \hat{A}_1 \hat{A}_2.$$

Sia  $\lambda$  un generico autovalore dell'operatore  $\hat{P}_{123}$ , l'equazione agli autovalori è

$$\hat{P}_{123}|x\rangle = \lambda|x\rangle,$$

dove  $|x\rangle$  è l'autovettore corrispondente. Usando la definizione dell'operatore  $\hat{P}_{123}$  come prodotto e facendo agire su ambo i membri della precedente equazione l'operatore  $\hat{A}_2 \hat{A}_3$  si ha

$$\begin{aligned} \hat{P}_{123}|x\rangle &= \hat{A}_1 \hat{A}_2 \hat{A}_3 |x\rangle = \lambda|x\rangle, & \text{facciamo agire da sinistra l'operatore } \hat{A}_2 \hat{A}_3, \\ \hat{A}_2 \hat{A}_3 \hat{A}_1 \hat{A}_2 \hat{A}_3 |x\rangle &= \lambda \hat{A}_2 \hat{A}_3 |x\rangle, & \text{il prodotto dei primi tre operatori del primo membro è } \hat{P}_{231}, \\ \hat{P}_{231} \hat{A}_2 \hat{A}_3 |x\rangle &= \lambda \hat{A}_2 \hat{A}_3 |x\rangle, & \text{poniamo } |y\rangle = \hat{A}_2 \hat{A}_3 |x\rangle \\ \hat{P}_{231}|y\rangle &= \lambda|y\rangle, \end{aligned}$$

questa è l'equazione agli autovalori dell'operatore  $\hat{P}_{231}$ , da cui si evince che  $\lambda$ , autovalore dell'operatore  $\hat{P}_{123}$  lo è anche dell'operatore  $\hat{P}_{231}$ . Questo vale per tutti gli autovalori dell'operatore di partenza. Ripetendo la procedura ciclicamente, si ottiene la dimostrazione richiesta, ovvero che gli spettri discreti dei tre operatori  $\hat{P}_{123}$ ,  $\hat{P}_{231}$  e  $\hat{P}_{312}$  coincidono.

## QUINTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 5/30)

Si ottenga lo spettro discreto dell'operatore  $\hat{S}$  unitario e hermitiano definito nello spazio di Hilbert  $Y_{2N+1}$  a  $2N + 1$  dimensioni, con  $N \in \mathbb{N}$ , sapendo che ha traccia unitaria.

## SOLUZIONE DEL QUINTO PROBLEMA

L'operatore  $\hat{S}$  in quanto hermitiano ha solo autovalori reali e in quanto unitario tali autovalori sono delle fasi pure, ovvero dei numeri complessi con modulo unitario. Ne consegue che i soli autovalori possibili sono i numeri appartenenti all'intersezione dei due insiemi, quello dei numeri reali e quello delle fasi pure, cioè

$$\mathbb{R} \cap \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{-1, 1\}.$$

L'operatore  $\hat{S}$  è diagonalizzabile in quanto hermitiano, chiamiamo  $S_d$  la matrice diagonale  $(2N + 1) \times (2N + 1)$  che lo rappresenta rispetto alla base dei suoi autovettori. Questa matrice ha sulla diagonale gli autovalori, ovvero i numeri  $-1$  e  $1$ , almeno uno dei quali è ripetuto più volte. Quindi, almeno uno dei due è un autovalore degenere. Indichiamo con  $D_- \in \mathbb{N}$  e  $D_+ \in \mathbb{N}$  i gradi di degenerazione rispettivamente dell'autovalore  $-1$  e  $1$ , cioè i numeri di volte che  $-1$  e  $1$  compaiono lungo la diagonale, si ha

$$D_- + D_+ = 2N + 1.$$

Naturalmente, se, ad esempio,  $D_- = 1$ , l'autovalore  $-1$  è non-degenere e l'autovalore  $1$  ha grado di degenerazione massimo  $D_+ = 2N$ . Viceversa, se  $D_+ = 1$ , l'autovalore  $1$  è non-degenere e  $-1$  lo sarà massimamente, avendo  $D_- = 2N$ . La traccia dell'operatore è la somma degli autovalori, per quanto discusso e sapendo che è unitaria, si ha

$$\text{Tr}(\hat{S}) = -D_- + D_+ = 1.$$

Questa condizione sulla differenza dei gradi di degenerazioni unitamente a quella sulla somma, permette di ottenere i valori

$$D_- = N, \quad D_+ = N + 1.$$

Lo spettro discreto è, quindi,

$$\sigma_d(\hat{S}) = \underbrace{\{-1, -1, \dots, -1\}}_{N \text{ elementi}} \cup \underbrace{\{1, 1, \dots, 1\}}_{N+1 \text{ elementi}}.$$

## SESTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 7/30)

Si calcoli la trasformata di Fourier della funzione

$$\mathfrak{M}(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}}.$$

**Curiosità.** Il simbolo  $\mathfrak{M}$  è il logo della metropolitana di Shenzhen, che si trova nella provincia cinese del Guangdong, una regione costiera a est del paese confinante a sud con la municipalità di Hong Kong.

### SOLUZIONE DEL SESTO PROBLEMA

Calcoliamo direttamente la trasformata di Fourier, dividendo il percorso d'integrazione, facendo, di conseguenza, un cambiamento di variabile e, in base alle proprietà delle variabili, riscrivendo lo stesso integrale in forma di parte reale, si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_k[\mathfrak{M}] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{|x|}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{-x}} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{x}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^0 \frac{e^{ikx'}}{\sqrt{x'}} (-dx') + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{x}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{ikx'}}{\sqrt{x'}} dx' + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{x}} dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{Re} \left( \int_0^{\infty} \frac{e^{ikx}}{\sqrt{x}} dx \right). \end{aligned}$$

Per comodità definiamo l'integrale

$$J(k) = \int_0^{\infty} \frac{e^{ikx}}{\sqrt{x}} dx$$

e consideriamo i due casi con  $k > 0$  e  $k < 0$ , nei quali useremo rispettivamente i due percorsi chiusi, mostrati in figura,

$$\Gamma_{\pm}(R) = [0, R] \cup \{z : z = Re^{i\theta}, \theta \in [0, \pm\pi/2]\} \cup [\pm iR, 0] \equiv [0, R] \cup \gamma_{\pm}(R) \cup [\pm iR, 0],$$

ovvero  $\Gamma_+(R)$  è la frontiera orientata in senso antiorario, quindi positivo, dello spicchio del disco centrato nell'origine di raggio  $R$  che sottende un angolo di  $\pi/2$  radianti e appartiene al primo quadrante, mentre  $\Gamma_-$  è la frontiera dello spicchio complesso coniugato, appartenente quindi al quarto quadrante, è quindi orientata in senso orario, cioè negativo.

Consideriamo, nel caso  $k > 0$ , il limite dell'integrale

$$0 = \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{\Gamma_+(R)} \frac{e^{ikz}}{\sqrt{z}} dz = J(k) - \int_0^{\infty} \frac{e^{-yk}}{\sqrt{iy}} idy + \underbrace{\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_+(R)} \frac{e^{ikz}}{\sqrt{z}} dz}_{=0 \text{ per il Lemma di Jordan.}} = J(k) - i^{1/2} \int_0^{\infty} e^{-yk} y^{-1/2} dy.$$

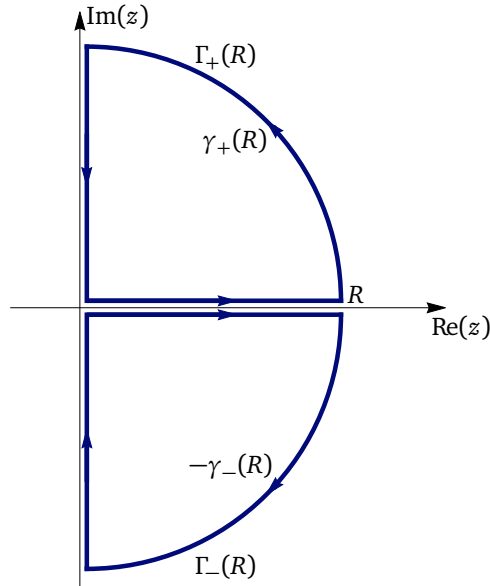
È nulla poiché la funzione integranda non ha singolarità avvolte dal percorso  $\Gamma_+(R)$ .

L'ultimo integrale vale

$$\int_0^{\infty} e^{-yk} y^{-1/2} dy = \{t = yk\} = k^{-1/2} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-1/2} dt = k^{-1/2} \Gamma(1/2) = k^{-1/2} \sqrt{\pi}.$$

dove abbiamo usato la rappresentazione integrale della funzione Gamma di Eulero,

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \text{con: } \operatorname{Re}(z) > 0$$



e il valore noto  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ .

Ne consegue che, per  $k > 0$ , l'integrale  $J(k)$  vale

$$J(k) = i^{1/2} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{k}} = i^{1/2} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{|k|}} = e^{i\pi/4} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{|k|}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{|k|}}.$$

Nel caso  $k < 0$ , procediamo semplicemente scambiando i percorsi d'integrazione  $\Gamma_+(R)$  con  $\Gamma_-(R)$  e si ha

$$0 = \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{\Gamma_-(R)} \frac{e^{ikz}}{\sqrt{z}} dz = J(k) - \int_0^{-\infty} \frac{e^{-yk}}{\sqrt{iy}} idy + \underbrace{\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_-(R)} \frac{e^{ikz}}{\sqrt{z}} dz}_{=0 \text{ per il Lemma di Jordan.}} = J(k) - i^{1/2} \int_0^{-\infty} e^{y|k|} y^{-1/2} dy.$$

L'ultimo integrale si calcola come ne caso precedente, cioè

$$\int_0^{-\infty} e^{y|k|} y^{-1/2} dy = \{t = yk = -y|k|\} = (-|k|)^{-1/2} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-1/2} dt = -i|k|^{-1/2} \sqrt{\pi},$$

quindi la funzione  $J(k)$  per valori negativi di  $k$  ha l'espressione

$$J(k) = -i^{3/2} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{|k|}} = -e^{3i\pi/4} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{|k|}} = \frac{1-i}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{|k|}}.$$

Infine, usando i risultati precedenti, la trasformata di Fourier può essere calcolata come

$$\mathcal{F}_k[\mathcal{J}] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{|k|}} \operatorname{Re} \left( \frac{1+i}{\sqrt{2}} \theta(-k) + \frac{1-i}{\sqrt{2}} \theta(k) \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{|k|}} \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{|k|}}.$$